

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 06.06.2023 14:32:34  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:

Руководитель ООП:

Толкаченко О.Ю.

«20» апреля 2022 г.



Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

## Теория вероятностей и математическая статистика

Направление подготовки

**38.03.01 ЭКОНОМИКА**

Профиль подготовки

**«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»**

Для студентов очной и заочной формы обучения

Составитель: Васильев А.А.

Тверь, 2022

## **I. Аннотация**

**1. Учебная дисциплина Теория вероятностей и математическая статистика** входит в модуль 2 дисциплин, формирующих ОПК.

Теория вероятностей является разделом математики, изучающим закономерности наблюдаемые в случайных явлениях. Математическая статистика изучает математические методы сбора, систематизации, обработки и интерпретации результатов наблюдений.

## **2. Цели и задачи дисциплины**

**Целью освоения** учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» является формирование и развитие у обучающихся системного мышления при анализе экономических явлений и процессов, для которых не могут быть даны точные предсказания в каждом отдельном случае в силу неизбежности влияния большого числа случайных факторов, не подлежащих строгому учету и контролю.

### **Задачи дисциплины:**

- Изучение закономерностей в случайных явлениях и процессах;
- Ознакомление со способами описания случайных величин и процессов;
- Развитие навыков в оценке основных числовых характеристик случайных величин и процессов; освоение методов построения и применения вероятностных моделей и методов математической статистики для решения экономических задач;
- Получение студентами навыков компьютерной реализации излагаемых методов и приемов.

## **3. Место дисциплины в структуре ООП.**

Учебная дисциплина *Теория вероятностей и математическая статистика* относится к базовой части к модулю 2, дисциплинам, формирующим общепрофессиональные компетенции. Основными базовыми дисциплинами для изучения данного курса являются: Математический анализ, Линейная алгебра и Информатика.

Понятия, методы и модели *Теории вероятностей и математической статистики* используются в курсах *Статистика, Эконометрика, Методы принятия управленческих решений, Моделирование рискованных ситуаций*.

Требования к «входным» знаниям и умениям обучающихся, необходимым для освоения изучаемой дисциплины:

- Знать методы и уметь анализировать функции многих переменных;
- Знать и практически использовать необходимые и достаточные условия существования экстремумов функции многих переменных;
- Знать методы и уметь решать задачи линейного и нелинейного программирования;
- Знать методы и уметь использовать плотность и законы распределения случайных величин в различных вероятностных расчетах;

- Знать и уметь оценивать статистические характеристики случайных величин, в том числе и характеристик их стохастической взаимосвязи.

Данная дисциплина является предшествующей для следующих дисциплин: Информационные технологии в управлении финансами, Информационные технологии в прогнозировании и планировании, Информационные технологии в управлении фирмой, Макроэкономическое планирование и прогнозировании, деньги, кредит, банки, Рынок ценных бумаг, Страхование, Управление предпринимательскими рисками в регионе.

Понятия, методы и модели *Теории вероятностей и математической статистики* необходимы для принятия практических решений в вопросах управления и прогнозирования в экономике.

#### 4.Объём дисциплины:

Для очной формы обучения (набор 2019, 2020 года):

4 зачетных единиц, 144 академических часов, **в том числе**

**контактная работа:** лекции 38 часов, практические занятия 38 часов, контроль 36 часов, **самостоятельная работа** 32 часов.

Для заочной формы обучения - нормативный срок обучения (набор 2018, 2019, 2020 года): 4 зачетных единиц, 144 академических часов, **в том числе**

**контактная работа:** лекции 10 часов, практические занятия 10 часов, контроль 9 часов, **самостоятельная работа** 115 часов.

Для заочной формы обучения - сокращённый срок обучения (набор 2019, 2020 года): 4 зачетных единиц, 144 академических часов, **в том числе**

**контактная работа:** лекции 4 часа, практические занятия 8 часов, контроль 9 часов, **самостоятельная работа** 123 часа.

#### 5. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Планируемые результаты освоения Образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
<p><b>ОПК-2</b> Способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач.</p>	<p><b>Владеть:</b> навыками сбора, обработки и анализа статистических данных и использовать их для решения профессиональных задач.</p> <p><b>Уметь:</b>использовать числовые характеристики случайных величин и методы математической статистики при описании экономических</p>

	<p>процессов;</p> <p><b>Знать:</b> Фундаментальные основы теории вероятностей и математической статистики (основные понятия и теоремы теории вероятностей, способы описания и числовые характеристики случайных величин, системы и функции случайных величин и случайных процессов, основы математической теории выборочного метода, проверки гипотез, дисперсионного, корреляционного и регрессионного анализа, основные регрессионные модели).</p>
<p><b>ОПК-3</b> Способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчётов и обосновать полученные выводы.</p>	<p><b>Владеть:</b> навыками применения аппарата теории вероятностей и математической статистики, методикой построения вероятностных моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.</p> <p><b>Уметь:</b> применять способы описания и числовые характеристики случайных величин, их функций, случайных процессов, методы и модели математической статистики для решения экономических задач;</p> <p><b>Знать:</b> Фундаментальные основы теории вероятностей и математической статистики (основные понятия и теоремы теории вероятностей, способы описания и числовые характеристики случайных величин, системы и функции случайных величин и случайных процессов, основы математической теории выборочного метода, проверки гипотез, дисперсионного, корреляционного и регрессионного анализа, основные регрессионные</p>

	модели).
--	----------

**6. Форма промежуточной аттестации - экзамен.**

**7. Язык преподавания русский.**

**II. Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам с указанием отведённого для них количества академических часов и видов учебных занятий**

**1. Для студентов очной формы обучения**

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа (час.)			Самостоятельная работа
		Лекции	Практические работы	Лабораторные работы	
Тема 1. Введение в учебную дисциплину Теория вероятностей и математическая статистика <b>Раздел I.</b> Часть I. Основные понятия и теоремы теории вероятностей	6	2	2		2
Тема 2. Основные понятия теории вероятностей	6	2	2		2
Тема 3. Основные теоремы теории вероятностей	6	2	2		2
Часть II. Дискретные и непрерывные случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики					
Тема 4. Способы описания и числовые характеристики случайных величин	6	2	2		2
Тема 5. Нормальный закон распределения и его числовые характеристики. Другие основные модели законов распределения вероятностей	10	4	4		2

Часть III. Системы и функции случайных величин					
Тема 6. Системы случайных величин и их числовые характеристики	6	2	2		2
Тема 7. Нормальный закон распределения для системы случайных величин	6	2	2		2
Тема 8. Функции случайных величин и их числовые характеристики	6	2	2		2
Тема 9. Закон больших чисел	5	2	2		1
<b>Раздел II. Основы математической статистики</b>					
Тема 10. Основные понятия математической статистики, выборочные характеристики и их свойства.	10	4	4		2
Тема 11. Статистическое оценивание параметров по данным выборки	12	4	4		4
Тема 12. Проверка статистических гипотез	12	4	4		4
Тема 13. Дисперсионный анализ	6	2	2		2
Тема 14. Корреляционный анализ	11	4	4		3
Контроль	36				
<b>ИТОГО</b>	<b>144</b>	<b>38</b>	<b>38</b>		<b>32</b>

## 2. Для студентов заочной формы обучения Нормативный срок обучения

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа (час.)			Самостоятельная работа
		Лекции	Практические работы	Лабораторные работы	
Тема 1. Введение в учебную дисциплину Теория вероятностей и матстатистика	6	2			4
<b>Раздел I.</b> Часть I. Основные понятия и теоремы теории вероятностей					
Тема 2. Основные понятия теории вероятностей	6				6
Тема 3. Основные теоремы теории вероятностей	6		2		4

<p>Часть II. Дискретные и непрерывные случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики</p> <p>Тема 4. Способы описания и числовые характеристики случайных величин</p> <p>Тема 5. Нормальный закон распределения и его числовые характеристики. Другие основные модели законов распределения вероятностей</p>	16	2	2	14	8
<p>Часть III. Системы и функции случайных величин</p> <p>Тема 6. Системы случайных величин и их числовые характеристики</p> <p>Тема 7. Нормальный закон распределения для системы случайных величин</p> <p>Тема 8. Функции случайных величин и их числовые характеристики</p> <p>Тема 9. Закон больших чисел</p>	13	2	2	9	7
<p><b>Раздел II. Основы математической статистики</b></p> <p>Тема 10. Основные понятия математической статистики, выборочные характеристики и их свойства.</p> <p>Тема 11. Статистическое оценивание параметров по данным выборки</p> <p>Тема 12. Проверка статистических гипотез</p> <p>Тема 13. Дисперсионный анализ</p> <p>Тема 14. Корреляционный анализ</p> <p>Контроль</p>	10	2	2	8	12
ИТОГО	144	10	10		115

### 3.Сокращённая программа обучения

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа (час.)			Самостоя- тельная работа
		Лек- ции	Практ и- ческие работ ы	Лаборато р-ные работы	
Тема 1. Введение в учебную дисциплину Теория вероятностей и матстатистика	5	1			4
<b>Раздел I.</b> Часть I. Основные понятия и теоремы теория вероятностей					
Тема 2. Основные понятия теория вероятностей	6				6
Тема 3. Основные теоремы теории вероятностей	6		2		4
Часть II. Дискретные и непрерывные случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики					
Тема 4. Способы описания и числовые характеристики случайных величин	15	1			14
Тема 5. Нормальный закон распределения и его числовые характеристики. Другие основные модели законов распределения вероятностей	10		2		8
Часть III. Системы и функции случайных величин					
Тема 6. Системы случайных величин и их числовые характеристики	13		2		11
Тема 7. Нормальный закон распределения для системы случайных величин	7				7
Тема 8. Функции случайных величин и их числовые характеристики	9				9
Тема 9. Закон больших чисел	6				6



<b>Раздел II. Основы математической статистики</b>					
Тема 10. Основные понятия математической статистики, выборочные характеристики и их свойства.	10	2			8
Тема 11. Статистическое оценивание параметров по данным выборки	12				12
Тема 12. Проверка статистических гипотез	12				12
Тема 13. Дисперсионный анализ	8				8
Тема 14. Корреляционный анализ	16		2		14
Контроль	9				
<b>ИТОГО</b>	<b>144</b>	<b>4</b>	<b>8</b>		<b>123</b>

### **III. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

1. Учебная программа дисциплины.
2. Перечень основных понятий, изучение которых предусмотрено дисциплиной.
3. Вопросы для подготовки к экзамену.
4. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов.

### **IV. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

#### **1. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенций.**

(ОПК-2: Способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач).

<b>Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина</b>	<b>Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков (2-3 примера)</b>	<b>Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания</b>
--	---	---

<p><b>ПЕРВЫЙ</b></p> <p><b>Владеть:</b> навыками сбора, обработки и анализа статистических данных и использовать их для решения профессиональных задач.</p>	<p>1. До внедрения контроля продукция предприятия содержала 10% бракованных изделий. Контроль позволяет с вероятностью 0,95 признать стандартной небракованное изделие и с вероятностью 0,1 отнести к стандартным бракованное изделие. Определить: а) Вероятность события А, состоящего в том, что изделие после контроля будет признано стандартным; б) Вероятность того, что выпущенное в продажу изделие предприятия окажется стандартным (небракованным).</p>	<p><i>Математическая модель построена правильно. Показатели определены правильно-2балла.</i></p> <p><i>Допущена арифметическая ошибка в вычислении одного показателя-1балл.</i></p> <p><i>Неправильно построена математическая модель-0баллов</i></p>
<p>Первый</p> <p><b>Уметь:</b> использовать числовые характеристики случайных величин и методы математической статистики при описании экономических процессов;</p>	<p>1. Предприятие получает заказы на очередной месяц по изготовлению изделий от <math>N</math> клиентов с одинаковой вероятностью <math>P</math> от каждого.</p> <p>1) вычислить вероятность <math>P_{N,m}</math> при <math>N = 100, p = 0,4</math> и <math>m = 40</math>, используя формулу Муавра-Лапласа</p> $P_{N,m} = \frac{1}{\sqrt{Npq}} \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) - \text{ функция Гаусса, при } x = \frac{m - Np}{\sqrt{Npq}}.$ <p>2) вычислить вероятность того, что число заказов будет в пределах от 20 до 60 при <math>N = 100, p = 0,4</math>.</p> <p>Вычисление произвести, пользуясь приближенным равенством</p> $P_{N,m}(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \varphi(x_2) - \varphi(x_1),$ <p>где</p> $x_2 = \frac{m_2 + 0,5 - Np}{\sqrt{Npq}}, x_1 = \frac{m_1 - 0,5 - Np}{\sqrt{Npq}},$ <p><math>\varphi(x)</math> - функция Лапласа</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Правильно определены два показателя – 2 балла</i></li> <li>• <i>Правильно определен один показатель – 1 балл</i></li> <li>• <i>Ни один показатель не определен правильно – 0 баллов</i></li> </ul>

<p>Первый</p> <p><b>Знать:</b>  Фундаментальные основы теории вероятностей и математической статистики (основные понятия и теоремы теории вероятностей, способы описания и числовые характеристики случайных величин, системы и функции случайных величин и случайных процессов, основы математической теории выборочного метода, проверки гипотез, дисперсионного, корреляционного и регрессионного анализа, основные регрессионные модели).</p>	<p>1. Оптовая база получает заказ на поставку партии товара на очередной день от трех клиентов. Вероятность поступления заказов равны соответственно:  <math>P_1 = 0,2, P_2 = 0,3, P_3 = 0,4</math>.  Найти вероятность того, что оптовая база</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) не получит ни одного заказа;</li> <li>2) получит один заказ</li> <li>3) получит два заказа</li> <li>4) получит 3 заказа</li> <li>5) получит не менее двух заказов.</li> </ol> <p>2. Закон распределения системы (X, Y) представлен в таблице</p> <table border="1" data-bbox="603 792 1142 958"> <thead> <tr> <th rowspan="2">X</th> <th colspan="4">Y</th> </tr> <tr> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0,1</td> <td>0,3</td> <td>0,2</td> <td>0,0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0</td> <td>0,1</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> </tr> </tbody> </table> <p>Найти:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>а) Законы распределения каждой составляющей системы X и Y.</li> <li>б) Условный закон распределения с.в. X при условии <math>y = 1</math>.</li> <li>в) Условный закон распределения с.в. Y при условии <math>x = 2</math>.</li> <li>г) Значение функции распределения <math>F(x, y)</math> при <math>x = 2, y = 3; x = 3, y = 3; x = 2, y = \infty; x = \infty, y = 2</math>.</li> </ol>	X	Y				0	1	2	3	1	0,1	0,3	0,2	0,0	2	0	0,1	0,1	0,2	<p><i>Правильно построена математическая модель и вычислены все вероятности-2балла</i>  <i>Допущена ошибка при вычислении одного из показателей-1балл.</i>  <i>Математическая модель построена неправильно-0баллов.</i></p> <p><i>Даны правильные ответы на все вопросы-3балла</i>  <i>Допущена неточность в ответе на один из поставленных вопросов-2балла</i>  <i>Допущены две ошибки в ответах-1балл</i>  <i>Допущено более двух ошибок-0баллов.</i></p>
X	Y																				
	0	1	2	3																	
1	0,1	0,3	0,2	0,0																	
2	0	0,1	0,1	0,2																	

## 2. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенций.

(ОПК-3:Способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчётов и обосновать полученные выводы).

<p><b>Этап формирования компетенции, в котором</b></p>	<p><b>Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков (2-3 примера)</b></p>	<p><b>Показатели и критерии оценивания компетенции,</b></p>
--	--	---

участвует дисциплина		шкала оценивания
<p><b>ПЕРВЫЙ</b></p> <p><b>Владеть:</b> навыками применения аппарата теории вероятностей и математической статистики, методикой построения вероятностных моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.)</p>	<p>1. До внедрения контроля продукция предприятия содержала 10% бракованных изделий. Контроль позволяет с вероятностью 0,95 признать стандартной небракованное изделие и с вероятностью 0,1 отнести к стандартным бракованное изделие. Определить:</p> <p>а) Вероятность события А, состоящего в том, что изделие после контроля будет признано стандартным;</p> <p>б) Вероятность того, что выпущенное в продажу изделие предприятия окажется стандартным (небракованным).</p> <p>2. По данным корреляционной таблицы вычислили:</p> <p>Общие средние переменные <math>\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = 32,1</math> и <math>\bar{y} = \frac{\sum y_i n_i}{n} = 16,92</math>.</p> <p>Вторые выборочные начальные моменты <math>\overline{x^2} = 1052,25</math> и <math>\overline{y^2} = 304,52</math></p> <p>Второй выборочный смешанный момент <math>\overline{xy} = 557,9</math></p> <p>Найти:</p> <p>а) выборочные дисперсии <math>s_x^2, s_y^2</math>;</p> <p>б) выборочные средние квадратичные отклонения <math>s_x</math> и <math>s_y</math>;</p> <p>в) выборочный корреляционный момент <math>\mu</math>;</p> <p>г) выборочные коэффициенты регрессии <math>\rho_{y/x}, \rho_{x/y}</math>;</p> <p>д) коэффициент корреляции <math>r</math>;</p> <p>е) построить уравнения прямых регрессии <math>y</math> на <math>x</math> и <math>x</math> на <math>y</math>.</p>	<p><i>Математическая модель построена правильно. Показатели определены правильно-2балла.</i></p> <p><i>Допущена арифметическая ошибка в вычислении одного показателя-1балл.</i></p> <p><i>Неправильно построена математическая модель-0баллов</i></p> <p><i>Все показатели определены верно-3балла.</i></p> <p><i>Допущена арифметическая ошибка при вычислении одного из показателей-2 балла.</i></p> <p><i>Допущена ошибка в формульном представлении одного из показателей-1балл.</i></p> <p><i>Допущено более одной ошибки в формульном представлении показателей-0баллов.</i></p>

<p>Первый</p> <p><b>Уметь:</b> применять способы описания и числовые характеристики случайных величин, их функций, случайных процессов, методы и модели математической статистики для решения экономических задач;</p>	<p>1. Предприятие получает заказы на очередной месяц по изготовлению изделий от <math>N</math> клиентов с одинаковой вероятностью <math>P</math> от каждого.</p> <p>1) вычислить вероятность <math>P_{N;m}</math> при <math>N = 100, p = 0,4</math> и <math>m = 40</math>, используя формулу Муавра-Лапласа</p> $P_{N;m} = \frac{1}{\sqrt{Npq}} \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) - \text{ функция Гаусса, при } x = \frac{m - Np}{\sqrt{Npq}}.$ <p>2) вычислить вероятность того, что число заказов будет в пределах от 20 до 60 при <math>N = 100, p = 0,4</math>.</p> <p>Вычисление произвести, пользуясь приближенным равенством</p> $P_{N;m}(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \varphi(x_2) - \varphi(x_1),$ <p>где</p> $x_2 = \frac{m_2 + 0,5 - Np}{\sqrt{Npq}}, x_1 = \frac{m_1 - 0,5 - Np}{\sqrt{Npq}},$ <p><math>\varphi(x)</math> - функция Лапласа</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Правильно определены два показателя – 2 балла</i></li> <li>• <i>Правильно определен один показатель – 1 балл</i></li> <li>• <i>Ни один показатель не определен правильно – 0 баллов</i></li> </ul>
<p>Первый</p> <p><b>Знать:</b> Фундаментальные основы теории вероятностей и математической статистики (основные понятия и теоремы теории вероятностей, способы описания и числовые характеристики случайных величин, системы и функции случайных величин и случайных процессов, основы математической теории выборочного метода, проверки</p>	<p>1. Оптовая база получает заказ на поставку партии товара на очередной день от трех клиентов. Вероятность поступления заказов равны соответственно:</p> $P_1 = 0,2, P_2 = 0,3, P_3 = 0,4.$ <p>Найти вероятность того, что оптовая база</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) не получит ни одного заказа;</li> <li>2) получит один заказ</li> <li>3) получит два заказа</li> <li>4) получит 3 заказа</li> <li>5) получит не менее двух заказов.</li> </ol>	<p><i>Правильно построена математическая модель и вычислены все вероятности- 2 балла</i></p> <p><i>Допущена ошибка при вычислении одного из показателей- 1 балл.</i></p> <p><i>Математическая модель построена неправильно- 0 баллов.</i></p>

гипотез, дисперсионного, корреляционного и регрессионного анализа, основные регрессионные модели).		
--	--	--

## **V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **а) Основная литература:**

1. Горлач Б. А. Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2021. — 320 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/4864>

### **б) дополнительная литература:**

2. Бородин А. Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2019. — 256 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/2026>
3. Туганбаев А. А. Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс] / А.А. Туганбаев, В.Г. Крупин. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2018. — 320 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/652>
4. Бирюкова Л. Г. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. - М.:НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 289 с. . - [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=370899>
5. Белько И. В. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование: Учебное пособие. - М.:НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2018. - 299 с. . - [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=542521>

## **VI. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. **Перечень доступных для ТвГУ информационных ресурсов:**
  - Доступ к Научной электронной библиотеке eLIBRARY.RU;
  - Доступ к информационно-правовой системе ФСО России "Эталонный банк данных правовой информации "Законодательство России";
  - Доступ к справочно - правовой системе "КонсультантПлюс";
  - Коллекция электронных книг Оксфордско-Российского фонда;
  - Доступ к Электронной библиотеке диссертаций РГБ;
  - Доступ к базе данных ПОЛПРЕД;

- Доступ к ресурсам АРБИКОН (сводные каталоги российских библиотек и информационных центров);
- Доступ к базам данных Всемирного Банка (The World Bank): World Development Indicators (WDI), Global Development Finance (GDF), Africa Development Indicators (ADI), Global Economic Monitor (GEM).

2. Имеется доступ к системам:

- Вопросы государственного и муниципального управления <http://ecsocman.hse.ru/>

- «Архив научных журналов» (создана Некоммерческим партнерством «Национальный электронно-информационный консорциум» (НП НЭИКОН)) (<http://archive.neicon.ru/xmlui/>)

2. ТвГУ имеет подписку на коллекцию из 331 российских журналов в полнотекстовом электронном виде, в том числе:

- Вопросы статистики
- Вопросы экономики
- Государство и право
- Деньги и кредит
- Известия Российской академии наук
- Теория и системы управления
- Маркетинг и маркетинговые исследования
- Мировая экономика и международные отношения
- Финансы и кредит.

3. В ТвГУ поступают журналы в бумажном виде:

- Вестник банка России 2011-2017
- Статистический бюллетень банка России 2010-2016
- Эффективное антикризисное управление 2010-2016.

## **VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

**Содержание методических разработок, перечисленных в разделе III «Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине»**

### **7.1. Учебная программа дисциплины**

Содержание разделов учебной дисциплины Теория вероятностей и матстатистика и последовательность изучения

#### **Тема 1. Введение в учебную дисциплину Теория вероятностей и математическая статистика**

Предмет теории вероятностей и краткая история ее развития. Сущность, назначение и условие применимости теория вероятности. Предмет

и методы математической статистики. Что дает объединение теории вероятностей и математической статистики? Вероятностно-статистическое моделирование как частный случай математического моделирования. Примеры социально-экономических задач, решаемых с привлечением вероятностно-статистических методов исследования.

## **Раздел I.**

### **Часть I. Основные понятия и теоремы теории вероятностей**

#### **Тема 2. Основные понятия теории вероятностей**

Понятие дискретного пространства элементарных событий. События и их вероятности. Непрерывное вероятностное пространство. Геометрическая интерпретация событий и геометрическое определение вероятности. Представление о теоретико-множественных понятиях и теории меры и их использование при вычислении вероятности любого события (теория Колмогорова А.Н.).

Классическая вероятностная модель для случая невозможных исходов. Простейшие задачи комбинаторики и их использование при непосредственном вычислении вероятностей событий. Статистическая вероятность события. Случайная величина и системы случайных величин.

#### **Тема 3. Основные теоремы теории вероятностей**

Теорема сложения вероятностей. Условная вероятность события и теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Вероятность гипотез или формула Байеса. Формула Бернулли или частная теорема о повторении опытов. Асимптотическая формула Муавра-Лапласа. Интегральная теорема Муавра – Лапласа. Общая теорема о повторении опытов и производящая функция. Повторение опытов с возможными исходами более двух. Полиномиальное распределение.

### **Часть II. Дискретные и непрерывные случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики**

#### **Тема 4. Способы описания и числовые характеристики случайных величин**

Способы описания случайных величин (обозначение случайной величины, закон распределения дискретной случайной величины, ряд распределения и многоугольник распределения, функция распределения (интегральный закон распределения) случайной величины и ее плотность распределения (дифференциальный закон распределения) случайной величины и ее свойства).



Числовые характеристики случайных величин (назначение числовых характеристик, математическое ожидание случайной величины, начальные и центральные моменты, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, асимметрия, эксцесс). Числовые характеристики случайной величины, распределенной по закону равномерной плотности. Числовые характеристики случайной величины, подчиненной экспоненциальному (показательному) закону распределения.

### **Тема 5. Нормальный закон распределения и его числовые характеристики. Другие основные модели законов распределения вероятностей**

Аналитическое задание и график нормального распределения или закона Гаусса. Численные параметры нормального закона и их влияние на форму нормальной кривой. Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал. Вероятность отклонения от математического ожидания и «правило трёх сигм».

Аналитические задания, график и моменты законов распределения: биномиального, полиномиального, Пуассона,. Генерация значений случайной величины, подчиняющейся заданному закону распределения вероятностей.

## **Часть III. Системы и функции случайных величин**

### **Тема 6. Системы случайных величин и их числовые характеристики**

Понятие и способы описания системы случайных величин. (понятие и обозначение системы случайных величин, закон распределения двумерной дискретной случайной величины, функция распределения системы двух случайных величин и ее свойства, вычисление вероятностей попадания случайной точки в прямоугольник, плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины, вероятность попаданий случайной точки в произвольную область, законы распределения составляющих системы двух случайных величин, условные законы распределения, зависимые и независимые случайные величины).

Числовые характеристики системы случайных величин (математические ожидания составляющих системы двух случайных величин, условные математические ожидания, начальные и центральные моменты, дисперсии и средние квадратические отклонения системы двух случайных величин, корреляционный момент и коэффициент корреляции, система  $n$  случайных величин и ее числовые характеристики).

## **Тема 7. Нормальный закон распределения для системы случайных величин**

Нормальный закон распределения системы двух случайных величин .  
Условные законы распределения и функции регрессии при нормальном законе. Эллипс распределения и каноническая форма представления нормального закона. Многомерное нормальное распределение.

## **Тема 8. Функции случайных величин и их числовые характеристики**

Функция одного случайного аргумента и ее закон распределения. Числовые характеристики функции случайных аргументов. Определение математического ожидания функций случайных величин по числовым характеристикам аргументов. Определение дисперсии функции случайных величин по числовым характеристикам аргументов. Примеры практического применения аппарата вычисления основных числовых характеристик функции случайных аргументов

## **Тема 9. Закон больших чисел**

Общее представление о законе больших чисел и центральной предельной теореме. Неравенство Чебышева (вывод и пояснение смысла точности неравенства Чебышева). Теорема Чебышева и ее обобщение. Теорема Маркова. Демонстрация на ПК статистической устойчивости выборочных характеристик. Практическое применение предельных теорем.

## **Раздел II. Основы математической статистики**

### **Тема 10 Основные понятия математической статистики, выборочные характеристики и их свойства.**

Генеральная совокупность, способы организации выборки и интерпретации выборочных наблюдений. Основные выборочные характеристики (выборочные функции распределения, относительные частоты и функции плотности, выборочные аналоги начальных и центральных моментов случайной величины, эмпирические аналоги центра группирования генеральной совокупности и показателей вариации рассеивания случайной величины).

Статистическая устойчивость выборочных характеристик и характер их вероятностного распределения при больших и ограниченных объемах выборки, аналитическая нормальность.

Вариационный ряд, порядковые статистики, закон их распределения.

Основные распределения, связанные с нормальным законом и используемые в статистическом анализе данных: распределение Пирсона

(«хи – квадрат»), Стьюдента ( $t$ -распределение), Фишера ( $F$ -распределение), Гамма и бета распределения. Квантили и процентные точки распределения.

### **Тема 11. Статистическое оценивание параметров по данным выборки**

Понятие оценки параметров. Статистические оценки и их основные свойства (несмещенность, состоятельность, эффективность).

Методы нахождения оценок: метод моментов, предложенный К. Пирсоном; метод максимального правдоподобия, предложенный Р.Фишером; метод наименьших квадратов.

Оценка генеральной доли, генеральной средней и генеральной дисперсии в случае повторной и бесповторной выборок.

Понятие интервального оценивания. Доверительный интервал и доверительная вероятность (надежность оценки).

Построение доверительного интервала для генеральной средней и генеральной доли по большим, умеренно большим и малой выборкам.

### **Тема 12. Проверка статистических гипотез**

Понятие статистической гипотезы. Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода. Мощность критерия. Статистический критерий. Критическая область (двусторонняя, правосторонняя и левосторонняя).

Общая схема проверки гипотез.

Проверка гипотез о равенстве средних (при известной и неизвестной генеральной дисперсии). Испытание гипотез на основе выборочной доли. Проверка гипотезы о величине дисперсии. Проверка гипотез о равенстве генеральных средних двух нормальных случайных величин (при известных и неизвестных дисперсиях). Проверка гипотез о равенстве дисперсий двух нормальных случайных величин.

### **Тема 13. Дисперсионный анализ**

Основные предположения дисперсионной модели.

Модели с фиксированными уровнями фактора и модели со случайным влиянием фактора. Понятия групповой средней и общей средней. Основное тождество дисперсионного анализа.  $F$ -распределение Фишера-Снедекора. Схема проведения дисперсионного анализа с использованием  $F$ -критерия.

### **Тема 14. Корреляционный анализ**

Понятие статистической, корреляционной и функциональной зависимости. Модельные уравнения и модельные функции регрессии. Выборочные линии или выборочные уравнения регрессии. Линейная парная

регрессия. Коэффициент корреляции и его свойства. Основная задача корреляционного анализа. Проверка значимости коэффициента корреляции. Эмпирические и теоретические корреляционные отношения. Коэффициент детерминации. Проверка линейности корреляционной зависимости.

### 7.3. Вопросы для самоконтроля

#### Вопросы для самопроверки по темам 1 и 2

1. Изучением закономерностей в каких явлениях занимается наука *теория вероятностей*?
2. Охарактеризуйте понятие «случайное явление».
3. Какое событие называется *достоверным* и какое *невозможным*?
4. Как называется количественная мера оценки возможности появления случайного события?
5. Какими числами выражается вероятность случайного события?
6. Чему равны вероятности *достоверного* и *невозможного* события?
7. Представьте *пространство событий*  $\Omega$  в эксперименте с бросанием монеты и игральной шестигранной кости.
8. Приведите примеры событий в эксперименте с игральной костью и вычислите вероятности этих событий в предположении симметричной кости.
9. Какое количество возможных исходов будет содержать *пространство событий* при бросании двух игральных костей?
10. Приведите примеры событий в эксперименте с бросанием двух игральных костей и вычислите вероятности этих событий.
11. Напишите формулу для вычисления математической вероятности события  $A$ .
12. Какие события называются *несовместными*? Приведите примеры несовместных событий.
13. Если события  $A$  и  $B$  являются несовместными, то существуют ли исходы испытания благоприятствующие и  $A$  и  $B$ ?
14. Какое событие называется *объединением* или *суммой* событий  $A$  и  $B$ ?
15. Дайте определение *объединения* событий  $A_1, A_2, \dots, A_S$ .
16. Используя знаки  $\cup$  или  $+$  запишите, что событие  $B$  является объединением событий  $A_1, A_2, \dots, A_S$ .
17. Дайте определение *совмещения* (пересечения или произведения) событий  $A_1, A_2, \dots, A_S$  и запишите математически, что событие  $B$  является пересечением событий  $A_1, A_2, \dots, A_S$ .

18. Определите понятие *несовместных событий* через понятие пересекающихся событий.
19. Дайте определение *полной группы событий*.
20. Какие события называются *равновозможными*?
21. Какие события называются *случаями*?
22. Какие эксперименты относят к *схеме случаев* или к «схеме урн»?
23. Дайте *геометрическое определение вероятности*.
24. Какие соединения элементов называются *размещениями из  $n$  элементов по  $m$* ?
25. Напишите формулу для определения числа всех размещений из  $n$  различных элементов по  $m$ .
26. Какие соединения называются *перестановкой из  $n$  элементов*?
27. Напишите формулу для определения числа всех перестановок из  $n$  различных элементов.
28. Какие соединения элементов называются *сочетаниями из  $n$  элементов по  $m$* ?
29. Напишите формулу для определения числа всех сочетаний из  $n$  различных элементов по  $m$ .

### Вопросы для самоконтроля по теме 3.

1. Сформулируйте и докажите теорему сложения вероятностей двух несовместных событий.
2. Методом полной индукции докажите теорему сложения вероятностей для произвольного числа несовместных событий.
3. Чему равна вероятность суммы событий, образующих полную группу событий?
4. Чему равна вероятность суммы двух противоположных событий?
5. Напишите формулу для определения вероятности суммы двух совместных событий  $A$  и  $B$ .
6. Дайте определение *условной вероятности события  $A$  при условии  $B$*  и *условной вероятности события  $B$  при условии  $A$* .
7. Сформулируйте *теорему умножения вероятностей для двух событий*.
8. Сформулируйте условие *независимости события*.
9. Чему равна *вероятность произведения независимых событий*?
10. Сформулируйте *теорему умножения вероятностей для произвольного числа событий*.
11. Напишите и объясните формулу *полной вероятности*.
12. Напишите и объясните *формулу Байеса*.

13. Напишите и объясните *формулу Бернулли*.
14. Применима ли формула Бернулли для зависимых испытаний?
15. Чему равна вероятность непоявления события в  $n$  опытах, если в каждом из опытов вероятность его появления равна  $P$ ?
16. Напишите приближенную формулу для вычисления вероятности появления события  $m$  раз в  $n$  независимых испытаниях, когда вероятность  $P$  наступления события постоянна и отлична от 0 и 1 (формулу Муавра-Лапласа) и  $n$  достаточно большое.
17. Сформулируйте общую теорему о повторении опытов при двух исходах с использованием понятия производящей функции.
18. Записать производящую функцию  $G_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$  для  $n$  независимых опытов, когда число возможных исходов опыта может иметь  $k$  исключаящих друг друга исходов соответственно с вероятностями  $P_1, P_2, \dots, P_k$ .

### Задачи и упражнения по темам 1, 2 и 3

1. В партии  $N$  изделий, из которых  $m$  бракованных.

Из партии выбирается  $s$  изделий.

- 1) определить общее число  $n$  возможных исходов эксперимента;
- 2) найти вероятность  $P(A_0)$  события  $A_0$ , состоящее в том, что среди выбранных изделий не будет бракованного;
- 3) найти вероятность  $P(A_1)$  события  $A_1$ , состоящего в том, что среди выбранных изделий окажется одно бракованное;
- 4) найти вероятность  $P(A_2)$  события  $A_2$ , состоящего в том, что среди выбранных изделий окажется 2 бракованных;
- 5) определить вероятность того, что выбранные изделия окажутся бракованными, если  $N = 50, m = 3, s = 3$ .

2. В партии  $N$  изделий, из которых  $m$  бракованных.

Из партии подряд вынимают три изделия.

- А) определить вероятность того, что все выбранные изделия окажутся бракованными, если  $N = 10, m = 4$ .

3. В магазин прибыли две партии одного наименования от двух производителей. В партии, поступившей от первого производителя, содержится  $N_1$  изделий, из которых  $m_1$  относятся к изделиям первого сорта, остальные к изделиям второго сорта.

В партии, поступившей от второго производителя, содержится  $N_2$  изделий, из которых  $m_2$  относятся к первому сорту, остальные ко второму. Продавец наугад выбрал партию изделий. Найти вероятность  $P(A_1)$  того, что было выбрано изделие 1 сорта.

Вычислить  $P(A_1)$ , если  $N_1 = N_2 = 10, m_1 = 1, m_2 = 5$ .

4. В условиях примера 3 оказалось, что продавец выбрал и продал изделие 1 сорта.

Определить вероятность того, что проданное изделие было изделием 1-го производителя.

5. предприятие получает заказы на очередной месяц по изготовлению изделий от  $N$  клиентов с одинаковой вероятностью  $P$  от каждого.

1) определить вероятность  $P_{N;m}$  поступления ровно  $m$  заявок.

Вычислить значение вероятности  $P_{N;m}$  при  $N = 10, p = 0,4$  и  $m = 5$ .

2) вычислить вероятность  $P_{N;m}$  при  $N = 100, p = 0,4$  и  $m = 40$ , используя формулу

Муавра-Лапласа  $P_{N;m} = \frac{1}{\sqrt{Npq}} \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  - функция Гаусса, при  $x = \frac{m - Np}{\sqrt{Npq}}$ .

3) вычислить вероятность того, что число заказов будет в пределах от 20 до 60 при  $N = 100, p = 0,4$ . Вычисление произвести, пользуясь приближенным равенством  $P_{N;m}(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ ,

где  $x_2 = \frac{m_2 + 0,5 - Np}{\sqrt{Npq}}$ ,  $x_1 = \frac{m_1 - 0,5 - Np}{\sqrt{Npq}}$ ,

$\varphi(x)$  - функция Лапласа

6. Оптовая база получает заказ на поставку партии товара на очередной день от трех клиентов. Вероятность поступления заказов равны соответственно:

$P_1 = 0,2, P_2 = 0,3, P_3 = 0,4$ .

Найти вероятность того, что оптовая база

- 1) не получит ни одного заказа;
- 2) получит один заказ
- 3) получит два заказа
- 4) получит 3 заказа
- 5) получит не менее двух заказов.

7. При прохождении контроля изделие может быть отнесено к первому сорту с вероятностью  $P_1$  или быть забракованным. Произведено 2 испытания.

Определить при  $P_1 = 0,3$  и  $P_2 = 0,6$  вероятность того, что

- 1) оба изделия оказались изделиями первого сорта;
- 2) оба изделия оказались изделиями второго сорта;
- 3) оба изделия были забракованы;
- 4) одно изделие первого сорта и одно изделие второго сорта;
- 5) одно изделие первого сорта и одно бракованное;
- 6) одно изделие второго сорта и одно бракованное.

#### Вопросы для самоконтроля по теме 4

1. Дайте определение *случайной величины* (с.в.), дискретной с.в. и непрерывной с.в.
2. Как принято обозначать с.в. и ее возможные значения?
3. Возможно ли наперед знать какое значение примет с.в.?
4. Что устанавливает «закон распределения» с.в.?
5. Какие Вы знаете формы закона распределения дискретной с.в.?
6. Какая форма представления закона распределения является универсальной, т.е. пригодной как для дискретной, так и для непрерывной с.в.?
7. Дайте определение *функции распределения*  $F(x)$ .
8. Как вычисляется функция распределения  $F(x)$  для дискретной с.в.?
9. Перечислите основные свойства функции распределения.
10. Представьте примерный вид функции распределения непрерывной с.в.
11. Какие еще названия функции распределения Вам известны?
12. Какую функцию  $f(x)$  по определению называют *плотностью вероятности* или *плотностью распределения*?
13. Являются ли синонимами названия *плотность вероятности*, *дифференциальная функция распределения*, *дифференциальный закон распределения*?
14. Перечислите основные свойства плотности вероятности  $f(x)$ .
15. Представьте график функции плотности вероятности  $f(x)$ , если известно, что она постоянна на отрезке  $a, b$  ( $a = 5, b = 15$ ) и равна нулю вне этого отрезка.
16. О какой с.в. говорят, что она подчинена *закону равномерной плотности* на участке от  $a$  до  $b$ ?



17. Какие характеристики называют *числовыми характеристиками* случайной величины?
18. Дайте определение и формульное представление *математического ожидания* или *среднего значения дискретной* случайной величины.
19. Дайте определение и формульное представление *математического ожидания* или *среднего значения непрерывной* случайной величины.
20. Является ли математическое ожидание случайной величины (м.о. с.в.) случайной величиной?
21. Что характеризует м.о. с.в.?
22. Какое значение случайной величины называют *модой дискретной* случайной величины?
23. Какое значение случайной величины называют *модой непрерывной* случайной величины?
24. Какое значение случайной величины называют *медианой*?
25. Чему равно математическое ожидание неслучайной (постоянной) величины?
26. Дайте определение и формульное представление начального момента порядка  $s$  дискретной и непрерывной случайной величины  $X$ ?
27. Что характеризует начальный момент первого порядка?
28. Дайте определение *центрированной* случайной величины.
29. Дайте определение и формульное представление *центрального момента* порядка  $s$  для дискретной и непрерывной случайной величины?
30. Чему равен *центральный момент* первого порядка для дискретной и непрерывной случайной величины?
31. Дайте определение *дисперсии* случайной величины  $X$ .
32. Напишите формулу для вычисления дисперсии дискретной случайной величины.
33. Напишите формулу для вычисления дисперсии непрерывной случайной величины.
34. Какой *центральный момент* используется в качестве характеристики *асимметрии* распределения?
35. Какую величину называют *коэффициентом асимметрии*?
36. Какой *центральный момент* используется при оценке эксцесса, характеризующего степень острровершинности кривой распределения?
37. Чему равно математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону равномерной плотности на участке от 5 до 15?

#### Задачи и упражнения по теме 4.

1. Вероятность отклонения при изготовлении изделия на первом станке равна  $P_1 = 0,1$ , при изготовлении на втором –  $P_2 = 0,2$ .

Проверяется одно изделие, изготовленное на первом станке и одно, подготовленное на втором.

Случайное число  $X$  – число изделий, не прошедших контроль. Построить ряд распределения и многоугольник распределения случайной величины  $X$ , принимающий значение 0, 1, 2.

2. Предприятие получает заказ на изготовление изделия от трех клиентов. Вероятность поступления заказа равны соответственно  $P_1 = 0,3; P_2 = 0,5; P_3 = 0,4$ .

Случайная величина  $X$  – число поступивших заказов.

- 1) Построить ряд и многоугольник распределения случайной величины  $X$ .
- 2) Построить функцию распределения случайной величины  $X$ .
- 3) Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ .
- 4) Найти второй и третий начальные моменты.

3. О случайной величине  $X$  известно, что она имеет постоянную плотность вероятности на отрезке от 20 до 40. Вне этого отрезка плотность вероятности  $f(x)=0$ .

- 1) Построить график функции  $f(x)$ ;
- 2) Написать выражение для плотности распределения  $f(x)$ ;
- 3) Найти выражение для функции распределения  $F(x)$ ;
- 4) Изобразить график функции распределения  $F(x)$ ;
- 5) Определить математическое ожидание и второй начальный момент случайной величины  $X$ .
- 6) Определить дисперсию случайной величины  $X$

4. Проводится контроль выпускаемых предприятием изделий. Проверка осуществляется до появления первой бракованной детали. Вероятность появления бракованной детали равна  $P$ .

Случайная величина  $X$  – число подвергшихся испытанию изделий.

- 1) построить ряд распределения случайной величины  $X$ .
- 2) определить математическое ожидание  $M[X]$  случайной величины  $X$ .

Замечание: при определении  $M[X]$  воспользуйтесь формулой для суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии  $q + q^2 + q^3 + \dots + q^k + \dots = \frac{q}{1-q}$  и результатом дифференцирования левой и правой части приведенные выражения

$$1 + 2q + 3q^2 + \dots + kq^{k-1} = \frac{d}{dq} \left( \frac{q}{1-q} \right) = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}.$$

5. Случайная величина  $X$  распределена по нормальному закону с параметрами  $M[X]=4, \sigma=1$ . Какова вероятность того, что

- 1) Случайная величина попадет в интервал (3,6).
- 2) Случайная величина попадет в интервал (1,7).
- 3) Отклонения от абсолютной величины будет меньше двух.

#### Вопросы для самоконтроля по теме 5

1. Дайте определение нормального закона распределения и напишите выражение плотности вероятности нормального распределения  $f(x)$ .

2. В какой точке кривая Гаусса принимает максимальное значение  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ?

3. Какие числовые характеристики плотностью определяют нормальный закон распределения?

4. Чему равны мода и медиана нормального закона распределения?

5. Чему равен коэффициент асимметрии и эксцесс нормального закона распределения?

6. Запишите вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону на интервале  $a$  и  $b$ , используя табличную функцию Лапласа.

7. Сформулируйте правило «трех сигм».

#### Вопросы для самопроверки по теме 6.

1. Дайте геометрическую интерпретацию системы двух случайных величин  $(X, Y)$  и системы трех случайных величин  $(X, Y, Z)$ .

2. Укажите возможные значения системы дискретных случайных величин  $(X, Y)$ , если случайные величины  $X$  и  $Y$  могут принимать значения  $x_1, x_2, \dots, x_m$  и  $y_1, y_2, \dots, y_n$  соответственно.

3. Что представляет собой закон распределения вероятностей системы дискретных с.в.  $(X, Y)$ ?
4. Запишите закон распределения каждой составляющей системы дискретных с.в.  $(X, Y)$ , зная закон распределения системы с.в.  $p(x_i, y_j)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n}$ .
5. Дайте определение функции распределения  $F(x, y)$  системы двух случайных величин  $(X, Y)$ .
6. Напишите формулу для вычисления значений функции распределения  $F(x, y)$  системы двух дискретных с.в.
7. Дайте геометрическую интерпретацию функции распределения  $F(x, y)$ .
8. Укажите границы неравенства  $\leq F(x, y) \leq$ , которому удовлетворяет значение функции распределения  $F(x, y)$ .
9. Определите соотношение между значениями функции распределения  $F(x_1, y)$  и  $F(x_2, y)$ , если  $x_2 \succ x_1$ .
10. Укажите значения функции распределения  $F(-\infty, y)$ ,  $F(x, -\infty)$  и  $F(-\infty, -\infty)$ ,  $F(\infty, \infty)$ .
11. При каком значении одного из аргументов функция распределения  $F(x, y)$  становится функцией распределения с.в., соответствующей другому аргументу?
12. Зная функцию распределения  $F(x, y)$ , запишите формулу для вычисления вероятности попадания случайной точки  $(X, Y)$  в область, ограниченную по оси абсцисс координатами  $a$  и  $b$ , а по оси ординат координатами  $c$  и  $d$ .
13. Определите понятие плотности распределения  $f(x, y)$  системы двух с.в.  $(X, Y)$ .
14. Определите понятие «элемента вероятности» для системы двух с.в.  $(X, Y)$ .
15. Перечислите основные свойства плотности совместного распределения вероятностей с.в.  $(X, Y)$ .
16. Запишите формулу для вычисления вероятности попадания случайной точки  $(X, Y)$  в произвольную область  $D$ .
17. Зная плотность распределения  $f(x, y)$ , определите функции распределения  $F_1(x)$  и  $F_2(y)$  случайных величин  $X$  и  $Y$ .
18. Зная плотность распределения системы с.в.  $(X, Y)$ , определите плотность распределения каждой из величин, входящих в систему.
19. Какое из двух высказываний а) и б) является справедливым?

а) зная закон распределения составляющих системы с.в.  $(X, Y)$  всегда можно определить закон распределения системы;

б) зная закон распределения составляющих системы с.в.  $(X, Y)$  всегда можно определить законы распределения составляющих системы.

20. Зная закон распределения  $p(x_i, y_j)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n}$  дискретных с.в.

$(X, Y)$ , запишите условные законы распределения составляющей  $X$  при условии, что  $Y = y_j$  и составляющей  $Y$  при условии, что  $X = x_i$ .

21. Зная плотность распределения  $f(x, y)$  системы с.в.  $(X, Y)$ , записать условные законы распределения  $f(x/y)$  и  $f(y/x)$ .

22. Дайте определение независимости с.в.  $X$  от с.в.  $Y$ .

23. Сформулируйте необходимое и достаточное условие независимости случайных величин  $X$  и  $Y$ .

1. Закон распределения системы  $(X, Y)$  представлен в таблице

X	Y			
	0	1	2	3
1	0,1	0,3	0,2	0,0
2	0	0,1	0,1	0,2

Найти:

а) Законы распределения каждой составляющей системы  $X$  и  $Y$ .

б) Условный закон распределения с.в.  $X$  при условии  $y = 1$ .

в) Условный закон распределения с.в.  $Y$  при условии  $x = 2$ .

г) Значение функции распределения  $F(x, y)$  при  $x = 2, y = 3$ ;  $x = 3, y = 3$ ;  $x = 2, y = \infty$ ;  $x = \infty, y = 2$ .

2. Определить вероятность попадания случайной точки  $(X, Y)$  в прямоугольник, ограниченный прямыми  $x = 0, x = \pi/6, y = \pi/6, y = \pi/2$  при известной функции распределения

$$F(x, y) = \sin x \cdot \sin y \left( 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

3. Координаты случайной точки распределены равномерно внутри прямоугольника, ограниченного прямыми  $x = 10, x = 20, y = 10, y = 30$ .

Найти плотность вероятности и функцию распределения системы с.в.  $[X, Y]$  и ее составляющих  $X$  и  $Y$ .

4. Задана функция распределения

$$F(x, y) = \sin x \cdot \sin y \left( 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

Найти плотность совместного распределения  $f(x, y)$  двумерной случайной величины  $(X, Y)$ .

5. Задана плотность совместного распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/9\pi & \text{при } x^2 + y^2 < 9 \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > 9 \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения составляющих системы X и Y.

б) условные плотности распределения  $f(x/y)$  и  $f(y/x)$ .

Вопросы для самопроверки по теме «Числовые характеристики системы случайных величин»

1. Какие числовые характеристики системы с.в. (X, Y) определяют координаты средней точки на плоскости, вокруг которой происходит рассеивание случайной точки (X, Y).
2. Зная закон распределения  $p(x_i, y_j)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n}$  системы двух дискретных с.в. (X, Y) запишите формулы для определения математических ожиданий (м.о.) составляющих системы.
3. Как найти м.о. составляющих системы (X, Y), если задана совместная плоскость вероятности  $f(x, y)$ ?
4. Дайте определение условного математического ожидания  $M(Y/X = x_i) = m_{y/x_i}$  дискретной с.в. Y при  $X = x_i$  и запишите формулу для его вычисления.
5. Напишите формулы для определения условных математических ожиданий  $m_{x/y}$  и  $m_{y/x}$ , если заданы условные законы распределения  $f(x/y)$  и  $f(y/x)$ .
6. Дайте определение начального момента  $m_{k,s}$  порядка k и s системы двух случайных величин (X, Y).
7. Приведите формулы для определения начального момента  $m_{k,s}$  порядка k и s для системы дискретных с.в. (X, Y).
8. Приведите формулы для определения начального момента  $m_{k,s}$  порядка k и s для системы непрерывных с.в. (X, Y).
9. Дайте определение центрального момента  $\mu_{k,s}$  порядка k и s системы двух с.в. (X, Y).
10. Приведите формулы для определения центрального момента  $\mu_{k,s}$  порядка k и s для системы дискретных с.в. (X, Y).
11. Приведите формулы для определения центрального момента  $\mu_{k,s}$  порядка k и s для системы непрерывных с.в. (X, Y).
12. Какому начальному моменту равно м.о. составляющей X системы с.в. (X, Y)?
13. Какому начальному моменту равно м.о. составляющей Y системы с.в. (X, Y)?

14. Какому центральному моменту равна дисперсия составляющей  $X$  системы с.в.  $(X, Y)$ ?
15. Какому центральному моменту равна дисперсия составляющей  $Y$  системы с.в.  $(X, Y)$ ?
16. какому центральному моменту равен корреляционный момент  $K_{xy}$  («момент связи») случайных величин  $X$  и  $Y$ ?
17. Напишите формулы для определения корреляционного момента  $K_{xy}$  дискретных и непрерывных случайных величин  $X$  и  $Y$ .
18. Чему равен корреляционный момент для независимых с.в.  $X$  и  $Y$ ?
19. Как определяется коэффициент корреляции  $r_{xy}$  случайных величин  $X$  и  $Y$ ?
20. Какое из двух высказываний а) и б) является справедливым:
  - а) из некоррелированности с.в.  $X$  и  $Y$  вытекает их независимость;
  - б) из коррелированности с.в.  $X$  и  $Y$  вытекает их зависимость.

1. Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет закон распределения представленный таблицей

X	Y			
	0	1	2	3
1	0,1	0,3	0,2	0,0
2	0	0,1	0,1	0,2

Найти:

- а) математическое ожидание составляющих системы  $X$  и  $Y$ ;
- б) условные математические ожидания с.в.  $Y$  при  $x = 1, x = 2$ ;
- в) начальные моменты

$$m_{2,0} = M[X^2 Y^0] = M[X^2]$$

$$m_{0,2} = M[X^0 Y^2] = M[Y^2],$$

- г) дисперсии и средние квадратические отклонения составляющих системы  $X$  и  $Y$ ;
- д) корреляционный момент («момент связи»)  $K_{xy}$  случайных величин  $X$  и  $Y$ ;
- е) коэффициент корреляции  $r_{xy}$  с.в.  $X$  и  $Y$ .

2. Известна плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной с.в.  $(X, Y)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{9}\pi & \text{при } x^2 + y^2 < 9 \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > 9 \end{cases}$$

Найти:

- а) математическое ожидание составляющих системы  $X$  и  $Y$ ;

- б) условные математические ожидания  $m_{x/y}$  и  $m_{y/x}$ .
- в) корреляционный момент  $K_{xy}$ .
3. Плотность совместного распределения вероятностей системы с.в. (X, Y) равна  $f(x, y) =$

### Вопросы для самоконтроля по теме 10

1. Основные задачи математической статистики
2. Что называют «генеральной совокупностью»?
3. Понятие выборки или «выборочной совокупности»?
4. Какую «выборку» называют повторной и какую «бесповторной»?
5. Какую «выборку» называют *репрезентативной* (представительной)?
6. Что понимается под «вариационным рядом»?
7. Что называют «статистическим распределением»?
8. В чем состоит отличие математического распределения от статистического распределения?
9. Дайте определение «эмпирической функции распределения»?
10. В чем состоит отличие эмпирической функции распределения  $F^*(x)$  от теоретической функции распределения  $F(x)$ ?
11. Определите понятия «полигон частот» и «полигон относительных частот».
12. Определите понятия «гистограмма частот» и «гистограмма относительных частот».
13. Чему равна площадь гистограммы частот?
14. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?

### Задачи по теме 10

1. Задано распределение частот выборки

$x_i$	3	5	10	12
$n_i$	5	10	8	7

- 1) Чему равен объем выборки?
- 2) Определите относительные частоты и представьте статистическое распределение выборки;
- 3) Определить значения эмпирической функции распределения (функцию распределения выборки)  $F^*(x)$  при  $x \leq 3$ , при  $3 < x \leq 5$ , при  $5 < x \leq 10$ , при  $10 < x \leq 12$ , при  $x > 12$  и построить график функции  $F^*(x)$ ;
- 4) Построить полигоны частот и относительных частот распределения.



2. Распределение частот выборки представлено в виде двух столбцов. В первом указан частичный интервал длиной  $h = 10$ , во втором – сумма частот вариантов (наблюдаемых значений  $x_i$ ) частичного интервала.

0 – 10	5
10 – 20	10
20 – 30	25
30 – 40	22
40 – 50	8

Построить гистограммы частот и относительных частот распределения.

#### **7.4. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов**

##### **Методические рекомендации по использованию рабочей программы дисциплины в начале изучения дисциплины**

1. Ознакомиться с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата) (режим доступа: <http://fgosvo.ru/uploadfiles/fgosvob/380301.pdf>), обратив внимание на:

- виды профессиональной деятельности, к которым готовятся выпускники, освоившие программу бакалавриата (п. 4.3);
- профессиональные задачи, которые должен быть готов решать выпускник, освоивший программу бакалавриата (п. 4.4);
- требования к результатам освоения программы бакалавриата (п. V).

2. Ознакомиться по данной рабочей программе дисциплины с:

- целью и задачами дисциплины (п. 2);
- местом дисциплины в структуре образовательной программы (п. 3);
- перечнем планируемых результатов обучения по дисциплине (п. 5);
- структурой изучения дисциплины и изучаемыми темами по “Содержанию дисциплины, структурированному по темам ...” (п. II) и “Учебной программе дисциплины” (п. 7.1);
- перечнем основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины (п. V).

3. Получить в филиале №1 научной библиотеки ТвГУ (расположен в корпусе №7, экономический факультет) учебные пособия из списка основной литературы в печатном виде (при наличии) или пароли и логины для доступа к электронно-библиотечным системам “Университетская библиотека ONLINE” и “ZNANIUM.COM”.

## **Методические рекомендации по использованию рабочей программы дисциплины при самостоятельной работе по изучению теоретических вопросов**

1. Ознакомиться с изучаемыми в теме вопросами по “Учебной программе дисциплины” (п. 7.1).

2. Изучить теоретические вопросы изучаемой темы (определения, понятия, теоремы, формульные соотношений) по полученным учебным пособиям с учетом “Перечня основных понятий, изучение которых предусмотрено дисциплиной” (п. 7.2).

3. При возникновении трудностей в изучении каких-либо вопросов целесообразно попытаться уяснить их, воспользовавшись другим рекомендованным учебным пособием. Если изучение непонятого материала по другому учебному пособию не привело к его усвоению, то следует обратиться за консультацией к преподавателю данной дисциплины.

## **Методические рекомендации по использованию рабочей программы дисциплины при подготовке к экзамену**

1. Ознакомится с перечнем вопросов для подготовки к экзамену(п. 7.3) и постарайтесь ответить на них.

2. Повторить решение типовых задач, приведенных в учебных пособиях [5] и [8] из списка дополнительной литературы.

## **Требования к рейтинг-контролю**

1. Оценка знаний по 100-балльной шкале в соответствии с рейтинговой системой ТвГУ согласно «Положения о рейтинговой системе обучения студентов ТвГУ», утвержденного ученым советом ТвГУ 31.05.2017 г.

2. К формам проведения рейтинг-контроля по данной дисциплине относятся:

1) текущий контроль качества освоения студентами учебного материала (письменные ответы на вопросы и работа на практических занятиях);

2) рубежный контроль качества освоения студентами учебного материала за модуль (письменная контрольная работа);

3) промежуточный (итоговый) контроль качества освоения студентами учебного материала за семестр (экзамен).

3. Текущий и рубежный контроль осуществляются на практических занятиях. Преподаватель информирует учебную группу о сроке проведения письменной контрольной работы в рамках рубежного контроля по завершении модуля и о выносимых на нее вопросах и задачах

не менее чем за 1 неделю до проведения. Качество усвоения студентами дисциплины в целом (по результатам текущего, рубежного и итогового контролей) в соответствии с п. 4.1 "Положения о рейтинговой системе обучения ..." оценивается по 100-балльной шкале.

Качество усвоения студентами дисциплины в целом (по результатам текущего, рубежного и итогового контролей) в соответствии с п. 4.1 "Положения о рейтинговой системе обучения ..." оценивается по 100-балльной шкале. Критериями оценки качества усвоения студентами дисциплины при текущем контроле на практических занятиях являются: 1) полнота выполнения заданий; 2) правильность выполненных расчетов; 3) понимание студентом сути выполняемых заданий (выявляется в ходе ответов на вопросы преподавателя. Семестр делится на 2 модуля. В каждом модуле студент может набрать максимально по 30 баллов. Для того, чтобы студент был допущен к экзамену, ему необходимо набрать не менее 20 баллов.

#### **Критерии оценки качества знаний для итогового контроля**

5-ти бальная оценка/ <b>бально-рейтинговая</b> оценка	Пояснения к оценке
<b>Отлично,</b> От 85 до 100 баллов	Теоретическое содержание курса освоено глубоко, материал излагается свободно, все учебные задания выполнены без ошибок, даны оригинальные решения, сформированы твердые практические навыки работы с материалом
<b>Хорошо,</b> От 70 до 84 баллов	Теоретическое содержание курса освоено, но при изложении имеют место нарушение логической строгости, неоправданные паузы, необходимые практические навыки работы с материалом сформированы
<b>Удовлетворительно</b> От 50 до 69 баллов	Допущены фактические и логические ошибки, свидетельствующие о неглубоком освоении теоретического содержания курса, имеются неточности при выполнении заданий, не приводящие к искажению смысла
<b>Неудовлетворительно</b>	Теоретическое содержание курса не освоено, необходимые практические навыки не сформированы, все учебные задания выполнены с грубыми ошибками.

*Примерные задания в рамках проведения текущего контроля*

**Задача 1.** На складе осталось 10 изделий. Из них 2 бракованных. Покупатель приобретает 2 изделия. Определить вероятность того, что

- а) оба изделия окажутся бракованными;
- б) оба изделия не имеют брака;
- в) одно изделие бракованное и одно стандартное.

**Обобщение задачи 1.** На складе  $N$  изделий. Из них  $M$  бракованных. Покупатель приобретает  $S$  изделия. Определить вероятность того, что ровно  $K$  изделий из  $S$  приобретённых окажутся бракованными.

**Задача 2.** Мастерская обслуживает 200 клиентов по их заявкам. Вероятность поступления заявки в течении рабочего дня 0,2. Определить вероятность того, что число поступивших заявок будет находиться в интервале от 20 до 50.

**Задача 3.** Мастерская получает заявки на обслуживание от 4-х клиентов. Вероятность поступления заявки от каждого из клиентов соответственно равны  $p_1=0,1$ ,  $p_2=0,2$ ,  $p_3=0,3$ ,  $p_4=0,4$ . Определить вероятность того, что поступит 0 заказов, 1, 2, 3 и 4 заказа.

**Задача 4.** Вероятность продажи автомобиля в течение месяца равна  $p$ . Случайная величина  $X$  – число месяцев, в течении которых будет продаваться автомобиль. Представить ряд распределения с.в.  $X$  и построить многоугольник распределения и функцию распределения  $F(x)$  при  $p=0,3$ .

**Задача 5.** Интенсивность отказа оборудования – 2 раза в год. Случайная величина – длительность времени безотказной работы  $T$ .

Определить:

- а) функцию распределения и функцию плотности вероятности с.в.  $T$ ;
- б) вероятность отказа оборудования в течение месяца, года, 2-х лет.

**Задача 6.** Известно, что вероятность появления мальчика при рождении на 0,03 больше, чем девочки. Определить вероятность появления 5-ти мальчиков при 10 новорожденных.

**Задача 7.** Вероятность того, что изделие бракованное  $p=0,005$ . Определить вероятность того, что из 1000 изделий окажется 5 бракованных.

**Задача 8.** Время ремонта аппаратуры представляет собой с.в.  $X$ , распределенную по экспоненциальному закону. Среднее время ремонта – 1-часов. Определить:

- а) параметр  $\lambda$  закона распределения с.в.  $X$ , ср.кв. отклонение  $\sigma_x$ .
- б) вероятность того, что ремонт не превысит 10 часов.

**Задача 9.** Определить м.о. и дисперсию с.в.  $X$  – числа мальчиков среди 10 новорожденных, если известно, что вероятность рождения мальчика на 0,03 больше, чем вероятность рождения девочки.

Задача 10. Расход автомобилем бензина в сутки составляет 10 литров. Оценить вероятность того, что расход бензина а) превысит 12 литров, б) составит не более 12 литров.

**Задача 11.** 10% выпускаемых изделий являются бракованными. Производится 100 независимых проверок. Оценить а) сверху вероятность того, что с.в.  $X$  – число стандартных изделий, отклонится от своего м.о. не меньше, чем на 10; б) оценить снизу вероятность противоположного события.

**Задача 12.** По данным корреляционной таблицы вычислили:

Общие средние переменные  $\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = 32,1$  и  $\bar{y} = \frac{\sum y_i n_i}{n} = 16,92$ .

Вторые выборочные начальные моменты  $\overline{x^2} = 1052,25$  и  $\overline{y^2} = 304,52$

Второй выборочный смешанный момент  $\overline{xy} = 557,9$

Найти:

а) выборочные дисперсии  $s_x^2, s_y^2$ ;

б) выборочные средние квадратичные отклонения  $s_x$  и  $s_y$ ;

в) выборочный корреляционный момент  $\mu$ ;

г) выборочные коэффициенты регрессии  $\rho_{y/x}, \rho_{x/y}$ ;

д) коэффициент корреляции  $r$ ;

е) построить уравнения прямых регрессии  $y$  на  $x$  и  $x$  на  $y$ .

*Шкала оценки заданий:*

- Ответ полностью соответствует условиям задания и обосновано – 5 баллов.
- Ответ в целом соответствует условиям задания, но отдельные аспекты не обоснованы – 4 балла.
- Ответ частично соответствует условиям задания, отдельные аспекты не обоснованы или имеются несущественные ошибки – 3 балла.
- Ответ не соответствует условиям задания, отдельные аспекты не обоснованы или имеются существенные ошибки – 0 баллов.

**VIII. Перечень педагогических и информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (по необходимости)**

а) педагогические технологии:

- объяснительно-иллюстративная (традиционная) технология обучения;
- практическая (традиционная) технология обучения;
- технология коллективного обучения;
- технология модульно-рейтингового обучения;

- технология проблемного обучения;
  - технология проектного обучения;
  - технология развивающего обучения;
- б) программное обеспечение:

в) электронно-библиотечные системы:

- Лань;
- Университетская библиотека ONLINE;
- ZNANIUM.COM.

#### **IX. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база необходимая и применяемая для осуществления образовательного процесса и программное обеспечение по дисциплине включает:

- специальные помещения (аудитории), укомплектованные специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации в аудитории;
- мультимедийное оборудование (ноутбук, экран и проектор);
- ПК для самостоятельной работы студентов в компьютерном классе с выходом в Интернет.

#### **Перечень лицензионного программного обеспечения:**

Adobe Reader XI (11.0.13) – Russian - 6

Google Chrome - 6

Microsoft Office профессиональный плюс 2010 Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017

Audit XP Акт предоставления прав № Tr063036 от 11.11.2014

Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows Акт на передачу прав №2129 от 25 октября 2016 г

Project Expert 7 Tutorial Договор №40 от 11.09.2012 г

Audit Expert 7 Tutorial Договор №40 от 11.09.2012 г

Prime Expert 7 Tutorial Договор №40 от 11.09.2012 г

Microsoft Windows 10 Enterprise Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017

CorelDRAW Graphics Suite X4 Education License Акт приема- передачи № Tr034515 от 15.12.2009

AnyLogic PLE - 6

iTALC – 6

1С: Предприятие 8. Комплект для обучения в высших и средних учебных заведениях Акт приема-передачи №Tr034562 от 15.12.2009

СПС ГАРАНТ аэро договор №5/2018 от 31.01.2018

Консультант + – договор № 2018С8702

#### **X. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины**

№п.п.	Обновленный	Описание внесенных	Дата и протокол
-------	-------------	--------------------	-----------------

	<b>раздел рабочей программы дисциплины</b>	<b>изменений</b>	<b>заседания совета Института экономики и управления, утвердившего изменения</b>
1.	V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	Обновлен список литературы по дисциплине	№ 13 от 20.04.2022 г.
2.	VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	Добавлены примерные задания для текущего контроля по дисциплине	№13 от 20.04.2022 г.