

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 20.11.2023 11:18:12  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:

Руководитель ООП

С.М. Дудаков

2023 г.



Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

## **ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

Направление подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Математическое моделирование

Для студентов 4 курса очной формы обучения

Составитель: к.т.н., доцент Г.А. Михно

Тверь, 2023

## I. Аннотация

### 1. Цель и задачи дисциплины

Преподавание дисциплины «Прикладные задачи вариационного исчисления» имеет следующие цели и задачи:

- ознакомить студентов с теоретическими и практическими основами вариационного исчисления;
- выработать у студентов навыки решения задач по вариационному исчислению;
- развить у студентов способность к реализации вариационных методов при решении прикладных задач.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части формируемой участниками образовательных отношений, разделу «Дисциплины профиля подготовки» является элективной дисциплиной.

Дисциплина требует знаний и умений, формируемых в результате освоения дисциплин «Математический анализ», «Функциональный анализ», изучаемых на предшествующих курсах.

### 3. Объем дисциплины: 6 зачетных единицы, 216 академических часов, в том числе:

**контактная аудиторная работа:** лабораторные работы 40 часов; в т.ч. практическая подготовка 8 часов.

**контактная внеаудиторная работа:** контроль самостоятельной работы \_\_\_ - \_\_\_\_, в том числе курсовая работа \_\_\_ - \_\_\_\_\_;

**самостоятельная работа:** 176 часов, в том числе контроль 60 часов.

### 4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
<b>ПК-3 Способен разрабатывать и анализировать новые математические модели в областях естественных, технических и экономических наук с учетом возможностей современных информационных технологий и вычислительной техники</b>	ПК-3.1 Знает методы математического моделирования  ПК-3.2 Разрабатывает и анализирует математические модели в области естественных, технических или экономических наук
<b>ПК-4 Способен использовать современные методы разработки</b>	ПК-4.1 Разрабатывает алгоритмы решения задач на базе математических моделей

алгоритмов и программного обеспечения для выполнения расчетов на базе математических моделей	ПК-4.2 Разрабатывает программное обеспечение для реализации алгоритмов решения задач на базе математических моделей
--	---

5. Форма промежуточной аттестации экзамен (8 семестр).

6. Язык преподавания русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)				Самостоятельная работа, в том числе Контроль (час.)
		Лекции	Лабораторные работы		Контроль самостоятельной работы (в том числе)	
			всего	в т.ч. практическая подготовка		
1. Введение в вариационное исчисление.	48	0	8	0	0	40
2. Вариационные принципы в математической физике.	52	0	8	0	0	44
3. Вариационные проблемы, связанные с важнейшими дифференциальными уравнениями.	56	0	10	4	0	46
4. Метод Ритца и метод Галеркина.	60	0	14	4	0	46
<b>ИТОГО</b>	<b>216</b>	<b>0</b>	<b>40</b>	<b>8</b>	<b>0</b>	<b>176</b>

### 1. Введение в вариационное исчисление.

1.1. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами.

Примеры задач вариационного исчисления. Вариация и ее свойства.

Исследование на экстремум задач с неподвижными границами. Необходимое условие экстремума функционала Уравнение Эйлера. Некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Определение экстремума функционалов, зависящих от нескольких функций, а также от производных более высокого порядка. Уравнение Эйлера-Пуассона. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Уравнение Остроградского.

1.2. Вариационные задачи с подвижными границами.

Простейшая задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.  
Задача с подвижными границами для функционалов, зависящих от нескольких функций.

1.3. Достаточные условия экстремума

Поле экстремалей. Функция Вейерштрасса.

Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду.

1.4. Вариационные задачи на условный экстремум.

Связи различного вида. Изопериметрические задачи.

## 2. Вариационные принципы в математической физике.

2.1. Минимальный интеграл в случае обыкновенного дифференциального уравнения.

2.2. Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.

2.3. Принцип минимума потенциальной энергии.

2.4. Минимальный интеграл в задаче об изгибе пластинки.

2.5. Минимальный интеграл в проблеме собственных значений.

## 3. Вариационные проблемы, связанные с важнейшими дифференциальными уравнениями.

3.1. Задачи, приводящие к обыкновенному уравнению.

3.2. Вариационные задачи, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона.

3.3. Вариационные задачи, связанные с бигармоническим уравнением.

3.4. Вариационные проблемы, связанные с нахождением собственных чисел и собственных функций.

## 4. Метод Ритца и метод Галеркина.

4.1. Основная идея метода Ритца и метода Галеркина.

4.2. Применение методов Ритца и Галеркина к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

4.3. Применение методов Ритца и Галеркина к решению уравнений в частных производных второго порядка.

4.4. Применение методов к бигармоническому уравнению.

4.5. Применение методов к нахождению собственных значений и функций.

## III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем (в строгом соответствии с разделом II РПД)	Вид занятия	Образовательные технологии
1. Введение в вариационное исчисление.	Лабораторные работы	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
2. Вариационные принципы в математической физике.	Лабораторные работы	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.

3. Вариационные проблемы, связанные с важнейшими дифференциальными уравнениями.	Лабораторные работы	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
4. Метод Рунге и метод Галеркина.	Лабораторные работы	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лабораторных работ и различных форм самостоятельной работы студентов. В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций: установочные лекции, лабораторные работы в интерактивном режиме, выполнение индивидуальных заданий в рамках самостоятельной работы. Дисциплина предусматривает выполнение контрольных работ, письменных домашних заданий.

#### **IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации**

*Текущая аттестация*  
Типовые задания:

##### ***Вариант 1.***

1). Найти экстремали функционала  $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2) dx$ .

2). На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx}] dx \quad ?$$

3). Определить кривую с заданными граничными точками, от вращения которой вокруг оси абсцисс образуется поверхность наименьшей площади.

##### ***Вариант 2.***

1). Исследовать на экстремум функционал  $v[y(x)] = \int_0^T (y^2 + (y')^2) dx$ ,

$$y(0) = y_0, \quad y(T) = y_1.$$

2). Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v(z(x, y)) = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

3). Найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2) dx, \quad y(0) = 0, \text{ если другая граничная точка может скользить}$$

по прямой  $x = \frac{\pi}{4}$ .

4). Существуют ли решения с угловыми точками в задаче об экстремуме

$$\text{функционала } v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2) dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 ?$$

### **Вариант 3.**

1). Найти геодезические линии круглого цилиндра  $r = R$ .

2). Написать дифференциальное уравнение экстремалей изопериметрической

задачи об экстремуме функционала  $v[y(x)] = \int_0^{x_1} [p(x)y'^2 + q(x)y^2] dx$  при условии

$$\int_0^{x_1} r(x)y^2 dx = 1; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = 0.$$

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Задача решена полностью - 5 баллов;

Задача содержит неточности и незначительные ошибки - 4 балла;

Решение содержит грубые ошибки - 2 балла.

### *Промежуточный контроль*

**ПК-3 Способен разрабатывать и анализировать новые математические модели в областях естественных, технических и экономических наук с учетом возможностей современных информационных технологий и вычислительной техники**

ПК-3.1 Знает методы математического моделирования

ПК-3.2 Разрабатывает и анализирует математические модели в области естественных, технических или экономических наук

### Типовые задания

#### Задание 1.

1. Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.
2. Минимальный интеграл в задаче об изгибе пластинки.

#### Задание 2.

1. Принцип минимума потенциальной энергии.
2. Применение методов Ритца и Галеркина к бигармоническому уравнению.

#### Задание 3.

1. Вариационные задачи, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона.
2. Применение методов Ритца и Галеркина к нахождению собственных значений и функций.

### **ПК-4 Способен использовать современные методы разработки алгоритмов и программного обеспечения для выполнения расчетов на базе математических моделей**

ПК-4.1 Разрабатывает алгоритмы решения задач на базе математических моделей

ПК-4.2 Разрабатывает программное обеспечение для реализации алгоритмов решения задач на базе математических моделей

### Типовые задания

1). Методом Ритца найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала  $v[y(x)] = \int_0^2 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx$ ,  $y(0) = y(2) = 0$ ,  $n = 2$ .

2). Методом Ритца найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала

$$v[u(x, y)] = \iint_D \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy, D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}, u|_{\Gamma_D} = x^2 + y^2, n = 3$$

3). Найти методом Ритца приближенное решение дифференциального уравнения  $y'' + x^2 y = x$ ;  $y(0) = y(1) = 0$ . Определить  $y_2(x)$  и  $y_3(x)$  и сравнить их значения в точках  $x = 0.25, x = 0.5, x = 0.75$ .

4). Методом Галеркина найти решение следующих вариационных задач:

а).  $v(y(x)) = \int_0^2 (xy' + y'^2) dx$ ,  $y(0) = 0, y(2) = 0$ .

б).  $v(y(x)) = \int_0^1 (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx, y(0) = 0, y(1) = 0.$

Ограничиться приближениями искомой экстремали в виде  $y_n(x) = \varphi(x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)$ , где  $\varphi(x)$  выбирается из условия выполнения граничных условий.

5). Составить программу вычисления функций  $\varphi_{k+1}(x) = \varphi(x)x^k, k = 0, 1, \dots, n-1$ , используемых при решении задачи 4).

Способ проведения – устный.

Критерии оценивания:

Вопрос изложен полностью – 12 баллов;

Ответ на вопрос содержит несущественные неточности - 10 баллов;

Ответ на вопрос содержит грубые ошибки - 4 балла.

## V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 1) Рекомендуемая литература

#### а) Основная литература

1. Авербух, Ю. В. Простейшие задачи вариационного исчисления: учебно-методическое пособие / Ю. В. Авербух, Т. И. Сержникова; под редакцией А. Н. Сесекин. — Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. — 41 с. — ISBN 978-5-7996-1250-4. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/65975.html> (дата обращения: 19.10.2023).

2. Тракимус, Ю. В. Основы вариационного исчисления в примерах и задачах: учебное пособие : [16+] / Ю. В. Тракимус. – Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2011. – 72 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=228989> (дата обращения: 19.10.2023).

#### б) Дополнительная литература

1. Васильева, А. Б. Дифференциальные и интегральные уравнения: вариационное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие: [16+] / А. Б. Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов. – Москва: Физматлит, 2005. – 214 с.: ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68123> (дата обращения: 19.10.2023).

### 2) Программное обеспечение

**Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики  
№ 249  
(170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)**



Cadence SPB/OrCAD 16.6	Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009
FidesysBundle 1.4.43 x64	Акт приема передачи по договору №02/12-13 от 16.12.2013
Google Chrome	бесплатно
JetBrains PyCharm Community Edition 4.5.3	бесплатно
Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Lazarus 1.4.0	бесплатно
Mathcad 15 M010	Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011
MATLAB R2012b	Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012
MiKTeX 2.9	бесплатно
NetBeans IDE 8.0.2	бесплатно
Notepad++	бесплатно
OpenOffice	бесплатно
Origin 8.1 Sr2	договор №13918/M41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»
Python 3.4.3	бесплатно
Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64 bit)	бесплатно
R for Windows 3.3.2	бесплатно
STATGRAPHICS Centurion XVI.П	Акт приема-передачи № Tr024185 от 08.07.2010
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ЭБС «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com);
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru/>;
3. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>.

Виртуальная образовательная среда ТвГУ (<http://moodle.tversu.ru>)

Научная библиотека ТвГУ (<http://library.tversu.ru>)

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Сайт ТвГУ: <http://homepages.tversu.ru/~s000154/MAPLE/maple.html>

Интернет-университет <http://www.intuit.ru>

## **VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины**

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60 баллов (30 баллов - 1-й модуль и 30 баллов - 2-й модуль).

Обучающемуся, набравшему 40–54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в рейтинговой ведомости учета успеваемости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Обучающемуся, набравшему 55–57 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо».

Обучающемуся, набравшему 58–60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 27 баллов и выставлена экзаменационная оценка «отлично». В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается.

Обучающийся, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен.

Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

### **Содержание самостоятельной работы**

1. Овладение основными понятиями вариационного исчисления.
2. Нахождение экстремумов функционалов в задачах с неподвижными границами (простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера).
3. Определение экстремумов функционалов, зависящих от нескольких функций.
4. Определение экстремумов функционалов, зависящих от производных более высокого порядка.
5. Определение экстремумов функционалов, зависящих от функций нескольких переменных.
6. Решение задач с подвижными границами.
7. Решение вариационных задач на условный экстремум; решение изопериметрических задач.
8. Изучение вариационных принципов в математической физике.
9. Изучение вариационных проблем, связанных с важнейшими дифференциальными уравнениями.
10. Изучение прямых методов вариационного исчисления.
11. Решение задач на применение методов Ритца и Галеркина.

### **Формы проведения самостоятельной работы:**

- домашние задания (изучение литературы по темам, решение примеров и задач);
- написание рефератов;
- подготовка к контрольным работам;
- подготовка к экзамену.

### **Формы контроля самостоятельной работы:**

- проверка и собеседование по результатам выполнения домашних работ;
- проведение и проверка контрольных работ;
- обсуждение рефератов;
- прием экзаменов.

### **Вопросы к экзамену**

1. Вариация и ее свойства.
2. Необходимое условие экстремума функционала.
3. Исследование на экстремум задач с неподвижными границами. Уравнение Эйлера. Некоторые простейшие случаи интегрируемых уравнений Эйлера.
4. Определение экстремума функционалов зависящих от нескольких функций, а также от производных более высокого порядка. Уравнение Эйлера-Пуассона.
5. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Уравнение Остроградского.
6. Вариационные задачи в параметрической форме.
7. Простейшая задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.
8. Задача с подвижными границами для функционалов, зависящих от нескольких функций.
9. Экстремали с угловыми точками.
10. Односторонние вариации.
11. Поле экстремалей.
12. Функция Вейерштрасса.
13. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду.
14. Вариационные задачи на условный экстремум. Связи вида  $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ .
15. Вариационные задачи на условный экстремум. Связи вида  $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0$ .
16. Изопериметрические задачи.
17. Минимальный интеграл в случае обыкновенного дифференциального уравнения.
18. Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.
19. Принцип минимума потенциальной энергии.
20. Минимальный интеграл в задаче об изгибе пластинки.
21. Минимальный интеграл в проблеме собственных значений.
22. Вариационные задачи, приводящие к обыкновенному уравнению.
23. Вариационные задачи, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона.

24. Вариационные задачи, связанные с бигармоническим уравнением.
25. Вариационные проблемы, связанные с нахождением собственных чисел и собственных функций.
26. Основная идея метода Ритца и метода Галеркина.
27. Применение методов Ритца и Галеркина к обыкновенным дифференциальным уравнениям.
28. Применение методов Ритца и Галеркина к решению уравнений в частных производных второго порядка.
29. Применение методов Ритца и Галеркина к бигармоническому уравнению.
30. Применение методов Ритца и Галеркина к нахождению собственных значений и функций.

## **VII. Материально-техническое обеспечение**

Для аудиторной работы

Учебная аудитория № 7 170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35	Набор учебной мебели, меловая доска.
---	--------------------------------------

Помещение для самостоятельной работы Компьютерный класс № 2 факультета ПМиК № 249	Набор учебной мебели, компьютер, проектор.
--	--

Для самостоятельной работы.

Помещение для самостоятельной работы Компьютерный класс № 2 факультета ПМиК № 249	Набор учебной мебели, компьютер, проектор.
--	--

## **VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины**

<b>№ п.п.</b>	<b>Обновленный раздел рабочей программы дисциплины</b>	<b>Описание внесенных изменений</b>	<b>Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения</b>
1.	11. 2) Программное обеспечение	Внесены изменения в список ПО	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета

2.	V. 1) Рекомендуемая литература	Обновление ссылок на литературу	От 24.08.2023 года, протокол № 1 ученого совета факультета
----	--------------------------------------	------------------------------------	---