Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:

Руководитель ООП

__________________Цветков В.П.

«__»___________________2023 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Математическое моделирование в гуманитарных науках

Направление подготовки

02.04.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)

Математическое и компьютерное моделирование

Для студентов очной формы обучения

МАГИСТРАТУРА

Для студентов 1 курса ОФО

Составитель:

д.ф.-м.н., профессор

Цветков В.П.

Тверь, 2023

I.Аннотация

1. Цель и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины является:

1. приобретение студентами знаний об основах современных методов математического моделирования и исследования социально-экономических процессов, а также методов и способов использования математического моделирования в гуманитарных исследованиях с применением современных компьютерных и информационных технологий.

Преподавание учебной дисциплины «Математическое моделирование в гуманитарных науках» строится на сочетании лекций, практических занятий и различных форм самостоятельной работы студентов. Предусмотрены аудиторные самостоятельные работы по основным темам курса, а также домашние задания.

Предполагается, что после освоения изложенных в куре методов студент сможет перейти к изучению приложений по специализированным источникам. Использование методов математического моделирования в гуманитарных исследованиях открывает замечательные возможности, как в исследовании бесконечного числа приложений, так и в области чистой прикладной математики.

Задачи курса:

- выработать представления о моделировании социальных процессов; способствовать установлению взаимосвязей реальных процессов, явлений и их математических моделей,
- научить разрабатывать алгоритмы реализации математических моделей для социально-экономических процессов, реализации моделей на практике;
- подготовить к эффективной работе в современной организации.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «**Математическое моделирование в гуманитарных науках**» Б1.В.ДВ.01.02 входит в Обязательную часть Б1 профессионального учебного плана по программе магистратуры. Дисциплина изучается в течении 3 семестра и заканчивается экзаменом.

Изучение данной дисциплины предшествует освоению дисциплин:

Фракталы и хаос в динамических системах.

3. Объем дисциплины 5 зачетных единиц, 180 академических часов,

в том числе:

контактная аудиторная работа: 34 часа лекции, 17 часов практическая работа;

самостоятельная работа: 102 часа, 27 часов контроль.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Формируемые компетенции	**Требования к результатам обучения** В результате изучения дисциплины студент должен:
ПК-1 Способен создавать и исследовать новые математические модели сложных социально-экономических и природных систем	**ПК-1.1** Строит новые математические модели сложных социально-экономических и природных динамических систем **ПК-1.2** Исследует характер поведения основных параметров построенных математических моделей сложных социально-экономических и природных динамических систем
ПК-2 Способен создавать комплексы программ для компьютерного моделирования сложных социально-экономических и природных систем на основе современных информационных технологий и сетевых ресурсов, в том числе отечественного производства	**ПК-2.2** Создает комплексы программ для вычисления параметров компьютерных моделей сложных социально-экономических и природных динамических систем и исследованию их характера поведения на основе современных информационных технологий и сетевых ресурсов **ПК-2.3** Создает комплексы программ для визуализации компьютерных моделей сложных социально-экономических и природных динамических систем на основе современных информационных технологий и сетевых ресурсов

5. Форма промежуточного контроля

Итоговой формой отчета является экзамен во втором семестре.

6. Язык преподавания русский**.**

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)			Самостоятельная работа, в том числе Контроль (час.)
		Лекции	Практическая работа	Контроль самостоятельной работы (в том числе курсовая работа)	
Тема 1. Место математических методов в гуманитарных исследованиях.	15	3	1	1	10
Тема 2. Статистические методы.	16	3	1	2	10
Анализ взаимосвязей	16	3	1	2	10
Тема 3. Многомерный статистический анализ	17	4	1	2	10
Тема 4. Математическое моделирование в гуманитарных науках	18	4	2	2	10
Тема 5. Методологические и методические основы применения математических методов в гуманитарных исследованиях.	16	3	2	1	10
Тема 6. Элементарные сведения о фракталах и катастрофах.	16	3	1	2	10
Тема 7. Катастрофы и управление катастрофами в модели мультифрактальной динамики..	18	3	2	3	10

Тема 8. Классификация динамик социально-экономических процессов по значению фрактальной размерности в рамках модели мультифрактальной динамики.	17	4	2	1	10
Тема 9. Фракталы и дискретные динамические системы в гуманитарных науках	15	3	2	2	8
Тема 10. Математические модели в исторических науках.	21	4	2	3	12
ИТОГО	180	34	17	27	102

III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем *(в строгом соответствии с разделом II РПД)*	Вид занятия	Образовательные технологии
Тема 1. Место математических методов в гуманитарных исследованиях.	Практическая работа	1. *Активное слушание* 2. *Метод case-study*
Тема 2. Статистические методы.	Практическая работа	1. *Информационные (цифровые)*
Анализ взаимосвязей	Практическая работа	1. *Информационные (цифровые)*
Тема 3. Многомерный статистический анализ	Практическая работа	1. *Активное слушание* 2. *Метод case-study*
Тема 4. Математическое моделирование в гуманитарных науках	Практическая работа	1. *Информационные (цифровые)* 2. *Методы группового решения творческих задач (метод Дельфи, метод 6–6, метод развивающей кооперации, мозговой штурм (метод генерации идей), нетворкинг и т.д.)*
Тема 5. Методологические и методические основы применения математических методов в гуманитарных исследованиях.	Практическая работа	1. *Активное слушание* 2. *Метод case-study*
Тема 6. Элементарные сведения о фракталах и катастрофах.	Практическая работа	1. *Активное слушание* 2. *Метод case-study*
Тема 7. Катастрофы и управление катастрофами в модели мультифрактальной динамики..	Практическая работа	1. *Активное слушание* 2. *Метод case-study*
Тема 8. Классификация динамик социально-экономических процессов по значению фрактальной размерности в рамках модели мультифрактальной динамики.	Практическая работа	1. *Дискуссионные технологии (форум, симпозиум, дебаты, аквариумная дискуссия, панельная дискуссия, круглый стол, фасилитированная и т.д.)*
Тема 9. Фракталы и дискретные динамические системы в гуманитарных науках	Практическая работа	1. *Информационные (цифровые)*
Тема 10. Математические модели в исторических науках.	Практическая работа	1. *Активное слушание* 2. *Метод case-study*

Состояния равновесия. Устойчивость. Типовые модели не-линейных динамических систем.	Практическая работа	1. *Дискуссионные технологии (форум, симпозиум, дебаты, аквариумная дискуссия, панельная дискуссия, круглый стол, фасилитированная и т.д.)*

Перечень педагогических и информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В качестве традиционных форм обучения дисциплине выступают лабораторные занятия. Также на занятиях практикуется самостоятельная работа студентов, выполнение заданий в малых группах, письменные работы, моделирование дискуссионных ситуаций, работа с раздаточным материалом, привлекаются ресурсы сети INTERNET, ролевые и деловые игры, кейс¬анализ, презентация, видеофильмы, видеокурсы, мультимедийные курсы, тестирование как метод контроля. Курс предусматривает выполнение контрольных и самостоятельных работ, письменных домашних заданий. В качестве форм контроля используются различные варианты взаимопроверки и взаимоконтроля.

В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций:

1) информационно-рецептивные:
- чтение и конспектирование литературы;

2) репродуктивные технологии:
- анализ и написание текстов,
- выполнение проблемных и творческих заданий;

3) рейтинговая система контроля успеваемости;

4) интерактивные технологии:
- тренинг в малых группах,
- дискуссии (пресс-конференция и круглый стол).

1. Составление экономико-математической модели задачи и ее решение графическим методом для задачи линейного программирования

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

ПК-1.1 Строит новые математические модели сложных социально-экономических и природных динамических систем

ПК-2.2 Создает комплексы программ для вычисления параметров компьютерных моделей сложных социально-экономических и природных динамических систем и исследованию их характера поведения на основе современных информационных технологий и сетевых ресурсов

Модель задачи линейного программирования, заданной в стандартной форме, такова:

Целевая функция $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min)$.

Ограничения $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,...,m; \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,...,n, \end{cases}$

где C_j, a_{ij} - постоянные коэффициенты (числа), b_i - правая часть ограничений (представляют собой также числа), X_j - искомые неизвестные, которые должны быть неотрицательны, m - число ограничений, n - число неизвестных.

Как известно, графически могут решаться:

1) задачи, заданные в стандартной форме, содержащие не более двух переменных;

2)задачи, заданные в канонической форме с числом свободных переменных $n - r < 2$, где: n - число неизвестных, r - ранг системы уравнений;

3)задачи общего вида, которые после приведения к канонической форме будут содержать не более двух свободных переменных.

В начале решения этой задачи и следует указать, почему эту задачу можно решить геометрическим способом в зависимости от того, в какой форме записана задача линейного программирования. Затем, если это необходимо, перейти к стандартной форме записи, т.е. сделать уравнения неравенствами (если задача была записана в каноническом виде) путем отбрасывания базисных переменных. Причем следует иметь в виду, что эти переменные неотрицательны. Затем следует выполнить шаги алгоритма решения задачи линейного программирования геометрическим (или графическим) способом, представленном в лекциях.

Проиллюстрируем ход решения такой задачи на следующем примере.

Условия задачи.

Фирме А предстоит решить, какое количество x_1 чистой стали и какое количество x_2 металлолома следует использовать для приготовления (из соответствующего сплава) литья для одного из своих заказчиков. Пусть производственные затраты в расчете на 1 т чистой стали равняются 3 усл. ед., а затраты на 1 т металлолома - 5 усл. ед. (последняя цифра больше предыдущей, так как использование металлолома сопряжено с его предварительной очисткой). Заказ предусматривает поставку не менее 5 т литья, если фирма А поставит перед ним такие условия.

Предположим, что запасы чистой стали ограничены и не превышают 6 т. Отношение веса металлолома к весу чистой стали в процессе получения сплава не должно превышать 7:8. Производственнотехнологические условия таковы, что на процессы плавки и литья не может быть отведено более 18 ч; при этом на 1 т стали уходит 3 ч, а на 1 т металлолома - 2 ч производственного времени.

Решить графическим способом.

Решение.

Особенность данной задачи, как уже указывалось, в том, что требуется предварительно составить экономико-математическую модель данной экономической ситуации, представленной в задаче. Это будет задача линейного программирования, которую возможно будет решить графическим способом. Для правильного построения математической модели очень важно хорошо разобраться в условиях задачи, ясно представлять все взаимосвязи между экономическими характеристиками, представленными в задаче.

Как известно, для построения математической модели следует придерживаться выполнения следующих пунктов:

1) определиться с неизвестными переменными, т.е. ответить на вопрос, что ищется в данной задаче;

2) что будет являться целевой функцией задачи, т.е. что выбрать в качестве критерия выбора оптимального решения;

3) что является ограничениями задачи, т.е. какие ресурсы и как они ограничены по количеству или размерам.

Ответим на данные вопросы в нашей задаче. В отличие от многих аналогичных задач здесь в начале задачи ясно сказано, что следует взять в качестве неизвестных. Их будет 2:

x_1 - количество тонн чистой стали;

x_2 - количество тонн металлолома, которое необходимо использовать для приготовления литья.

Далее в данной задаче в качестве целевой функции выступает явственно минимизация производственных затрат, понесенных фирмой в результате выполнения заказа. В других условиях критериями могут быть и максимизация прибыли и минимизация отходов при производстве и т.п. Все необходимое будет дано в условиях задачи для правильного составления целевой функции и системы ограничений.

Составляем целевую функцию для нашей задачи: $3x_1$ (усл. ед.) - производственные затраты, которые понесет фирма в результате использования x_1 т чистой стали, $5x_2$ (усл. ед.) - в результате использования x_2 т металлолома. Суммарные затраты - $3x_1 + 5x_2$ (усл. ед.). Итак, $F = 3x_1 + 5x_2$ ^ *min.*

Составляем неравенства по ограничениям данной задачи. Эти ограничения будут составлены, судя по тексту задачи, по 4 условиям:

1) по количеству литья в поставке;

2) по количеству имеющихся ресурсов 2-х типов (чистая сталь и металлолом);

3)по отношению веса металлолома к весу чистой стали или по технологии приготовления сплава;

4) по производственно-технологическим временным условиям плавки и литья.

Итак:

1) $x_1 + x_2 \geq 5$ (т);

2а) $x_1 \leq 4$ (т);

2б) $x_2 \leq 6$ (т);

3) $\dfrac{x_2}{x_1} \leq \dfrac{7}{8}$;

4) $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (ч).

Следовательно, в результате формализации получили следующую математическую модель задачи линейного программирования:

$F = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow min.$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \leq 6, \\ 8x_2 - 7x_1 \leq 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Это задача линейного программирования, записанная в общей форме, имеющая два неизвестных. Следовательно, ее возможно решить графическим методом. Следуем алгоритму решения задачи линейного программирования графическим способом, представленным в лекционном материале либо в учебниках. Эту часть решения задачи даем кратко.

Строим область допустимых решений задачи (см. рис. 1).

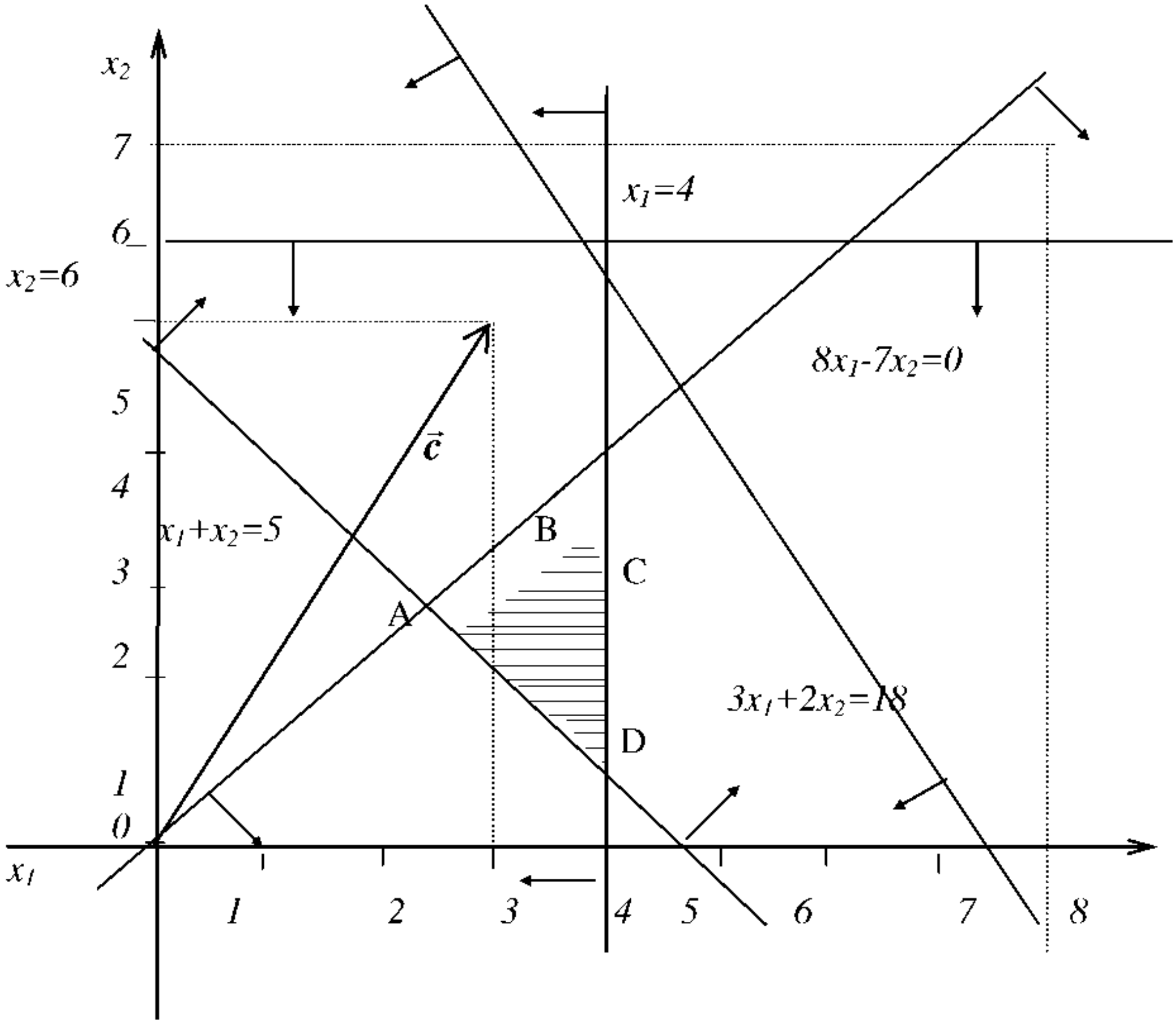

Рис. 1. Геометрическое решение задачи линейного программирования

Для этого переходим от неравенств к равенствам и строим соответствующие прямые.

Затем снова переходим к неравенствам и определяем полуплоскости, соответствующие каждому неравенству. Эти полуплоскости показываем штриховкой, направленной от соответствующей прямой в определенную сторону. Определение полуплоскости производим по какой- либо точке, не лежащей на данной прямой.

Для полученных полуплоскостей находим их пересечение или общую часть. Полученная область ABCT) - выпуклый четырехугольник. Строим вектор ***C*** целевой функции с тем, чтобы определить оптимальную точку, где найдется ее минимум. Последняя общая точка нормали (или линии уровня), проведенной к вектору ***C*** *с* областью допустимых решений и передвигаемой в сторону, противоположную направлению вектора (т.к. у нас минимум), и будет точкой, в которой найдется минимальное значение целевой функции. Это точка D. Найдем ее координаты. Следует особо указать на то, что эти координаты необходимо определять не из графика, а аналитически. График необходим только для того, чтобы выяснить, на каких прямых находится искомая вершина, тем самым определить, какие равенства следует взять для аналитического определения координат.

В нашем случае точка D лежит на пересечении прямых $x=4$ и $x_1+x_2=5$. Следовательно, $x=4$ и $x_2=1$.

Таким образом, решением данной задачи будет следующее управленческое решение: фирме следует взять 4 т чистой стали и 1 т металлолома, получить литье из этого сплава и передать заказчику. При этом будут понесены производственные затраты в количестве $3\text{-}4 + 5\text{-}1 = 17$ (усл. ед.).

Обращается внимание студентов на то, что обязательно должно быть подсчитано значение целевой функции в оптимальной точке. Отсутствие этого расчета будет расценено как нерешенность задачи.

Во многих вариантах заданий во второй задаче требуется еще составить двойственную к данной задаче задачу линейного программирования, а иногда решить и ее геометрическим образом.

2. Решение задачи целочисленного программирования методом Гомори

ПК-1.1 Строит новые математические модели сложных социально-экономических и природных динамических систем

ПК-1.2 Исследует характер поведения основных параметров построенных математических моделей сложных социально-экономических и природных динамических систем

Условия задачи.

Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори:

Найти $Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow min$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \\ 3x_1 \qquad + x_3 \le 5, \\ x_j \ge 0, \end{cases} \quad x_j \text{ - целочисленные } (j = 1,2,3).$$

Решение.

Используя симплекс-метод, найдем решение данной задачи без учета целочисленности переменных. Как известно, для того, чтобы построить симплекс-таблицу, необходимо систему неравенств преобразовать в систему уравнений, т.е. добавить дополнительные переменные X_4, X_5, x_6:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5, \\ x_j \geq 0, \end{cases}$$

x_j - целочисленные $(j = 1, \dots ,6)$.

В строку оценок симплекс-таблицы значения коэффициентов при неизвестных в целевой функции запишутся с противоположным знаком, т.к. нужно найти минимальное значение линейной функции. Вектора $\boldsymbol{A_4}, \boldsymbol{A_5}, \boldsymbol{A_6}$ составляют базис. $a_1 = (0; 0; 0; 1; 2; 5)$ - опорное решение. Просматриваем строку оценок. Замечаем, что существуют положительные оценки, значит, опорное решение не является оптимальным.

Таблица 1

Симплекс таблица 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	-1	1	$\boxed{1}$	0	0	1
-4	2	-1	0	1	0	2
3	0	1	0	0	1	5
-1	1	3	0	0	0	0

Наибольшая положительная оценка равна трем $(0_3 = 3)$, поэтому необходимо вектор $\boldsymbol{A_3}$ ввести в базис. По формуле определим, какую переменную нужно вывести из базиса: $\theta = \dfrac{d_k}{a'_{ks}} = \min \left\{ \dfrac{d_l}{a'_{ls}} \right\}$, где $a'_{ls} > 0$, получаем $\theta = min\{ \frac{1}{1}; \frac{5}{1} \} = 1$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{A_4}$

Таблица 2

Симплекс таблица 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	-1	1	1	0	0	1
-2	$\boxed{1}$	0	1	1	0	3
1	1	0	-1	0	1	4
-7	4	0	-3	0	0	-3

Вектора $\boldsymbol{A_3}, \boldsymbol{A_5}, \boldsymbol{A_6}$ составляют базис $\alpha_2 = (0; 0; 1; 0; 3; 4)$ - опорное решение. В строке оценок существует одна положительная оценка $(\sigma_2 = 4)$, следовательно, опорное решение не является оптимальным.

Вектор A_2 необходимо ввести в базис. Проводим еще одну итерацию симплекс-метода:

Таблица 3

Симплекс таблица 3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	1	2	1	0	4
-2	1	0	1	1	0	3
$\boxed{3}$	0	0	-2	-1	1	1
1	0	0	-7	-4	0	-15

$\theta = min\{ \frac{3}{1}; \frac{4}{1}\} = 3,$ отсюда вектор A_5 выводим из базиса. Теперь A_2, A_3, A_6 - вектора базиса. $a_3 = (0; 3; 4; 0; 0; 1)$ - опорное решение. В строке оценок снова имеется одна положительная оценка $(a_Г = Г)$. Следовательно, опорное решение a_3 не является оптимальным. Вектор A_6 выводим из базиса, т.к. $0 = min\{ Г \} = Г$ находится в третьей строке, которой соответствует единичный вектор A_6.

Таблица 4

Симплекс таблица 4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	1	2	1	0	4
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{3}$
1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	0	0	$-\frac{19}{3}$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{46}{3}$

A_1, A_2, A_3 - базис, $\alpha_4 = (\frac{1}{3}; \frac{11}{3}; 4; 0; 0; 0)$- опорное решение. В строке оценок все оценки либо равны нулю, либо отрицательны. Это говорит об оптимальности опорного решения a_4. В связи с тем, что a_4 не целочисленный, то составляем дополнительное ограничение (сечение Гомори) переменной x_h которая имеет наибольшую дробную часть: $q> = = Xi - [x_i] > 0,$ где qi - дробная часть переменной x_i, $[x]$ - целая часть переменной X_i.

$$q_2 = \frac{11}{3} - \left\lfloor \frac{11}{3} \right\rfloor = \frac{11}{3} - 3 = \frac{2}{3},$$

$$q_3 = \frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Наибольшую дробную часть имеет x_2. Составляем ограничение, общий вид которого:

$\left[(q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \ldots + q_{in}x_n) - q_i\right] \geq 0$, где $q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{in}$ - дробные части соответствующих переменных при реализованном i (у нас второе уравнение, $i=2$).

В нашем случае $q_{21} = q_{22} = q_{23} = 0$,

$$q_{24} = -\frac{1}{3} - \left\lfloor -\frac{1}{3} \right\rfloor = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3};$$

$$q_{25} = \frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3};$$

$$q_{26} = \frac{2}{3} - \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}.$$

Итак, получаем следующее сечение Гомори:

$$\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 \geq \frac{2}{3}.$$

Неравенство преобразуем в уравнение, считая дополнительную переменную x_7 также неотрицательной и целочисленной.

$$\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 - x_7 = \frac{2}{3}.$$

Теперь сечение Гомори присоединяем к последней получившейся симплекс - таблице, т.е. вводим дополнительные строку и столбец.

Таблица 5

Симплекс таблица 5

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	0	1	2	1	0	0	4
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{11}{3}$
1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{2}{3}}$	-1	$\frac{2}{3}$
0	0	0	$-\frac{19}{3}$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{46}{3}$

Базисных переменных у нас три, а уравнений 4. Получим базис для этой системы.

Таблица 6

Симплекс таблица 6

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	0	1	2	1	0	0	4
0	1	0	-1	0	0	1	3
1	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	1

0	0	0	-6	$-\frac{7}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-15

A_1, A_2, A_3, A_6 - базис. $a_5 = (0; 3; 4; 0; 0; 1; 0)$ - опорное решение. Все оценки либо равны *0,* либо отрицательны, следовательно, по признаку оптимальности для симплекс-метода, a_5 является оптимальным, к тому же состоящим из целочисленных значений.

Усекаем оптимальное решение до трех основных переменных, подсчитываем $Z_{min}=-15$ при $a = (0; 3; 4)$.

3. Решение транспортной задачи методом потенциалов

ПК-1.2 Исследует характер поведения основных параметров построенных математических моделей сложных социально-экономических и природных динамических систем

ПК-2.2 Создает комплексы программ для вычисления параметров компьютерных моделей сложных социально-экономических и природных динамических систем и исследованию их характера поведения на основе современных информационных технологий и сетевых ресурсов

Условия задачи.

Найти оптимальное распределение трех видов механизмов, имеющихся в количествах: $a_1 = 45$, $a_2 = 20$, $a_3 = 35$ (ед.) между четырьмя участками работ, потребности которых соответственно равны $b_1 = 10$, $b_2 = 20$, $b_3 = 30$, $b_4 = 40$ (ед.) при следующей матрице производительности каждого из механизмов на соответствующем участке работы

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Нулевые элементы означают, что данный механизм на данном участке работы не может быть использован. Первоначальный опорный план составить по методу наименьшей стоимости.

Решение.

Данная задача, по сравнению с обычными транспортными задачами, имеет 2 особенности. Первая состоит в том, что данная задача на максимум целевой функции - производительности механизмов, а задача в обычной записи - на минимум целевой функции.

Вторая особенность состоит в некотором усложнении постановки задачи, а именно, нулевые элементы в матрице планирования, или, иначе говоря, запрещение использования механизма на данном участке работ.
Преобразуем матрицу производительности механизмов в матрицу трудоемкости работ. Тогда критерием задачи будет распределение механизмов по участкам работ, обеспечивающих минимальную трудоемкость

гдt матрица получится следующей, где M - слишком большая трудоемкость.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & M & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & M \\ M & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Целевая функция преобразованной задачи : $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} \to \min$, где x_{ij} - количество механизмов *i-го* вида, распределяемых на *j-й* участок работы, $i=1,2,3;\ j=1,2,3,4.$

Строим первоначальный опорный план по методу наименьшей стоимости. В клетку с наименьшей стоимостью (в данном случае трудоемкостью) *7* помещаем по возможности наибольшую перевозку *(min{35,30}=30),* оставшиеся 5 ед. механизмов 3-го вида распределяем в клетку a_3b_4 со стоимостью *6.* У потребителя (участка работ) b_4 осталось *35* ед. потребностей, которые помещаем в клетку a_1b_4, т.к. в клетке a_2b_4 стоит M - слишком большая трудоемкость. Оставшиеся 10 ед. нераспределенных механизмов 1-го вида распределяем в клетку a_1b_1 с наименьшей трудоемкостью *5*. 20 ед. 2-го вида распределяем в клетку с трудоемкостью *5*, как наименьшую среди оставшихся.

Полученный опорный план является вырожденным, т.к. имеется $n+m-1 = 4+3-1 = 6*5$ занятых клеток. Для того чтобы опорный план сделать невырожденным (а это необходимо для построения системы потенциалов), вводим фиктивно занятую клетку, т.е. нулевую перевозку, но клетку считаем занятой. Помещаем по возможности эту перевозку в клетку плана, которая удовлетворяет условию ацикличности и имеет наименьшую оценку. Этому условию удовлетворяет клетка a_3b_2. Трудоемкость всего опорного плана равна

$$10 \cdot \frac{1}{5} + 35 \cdot \frac{1}{5} + 20 \cdot \frac{1}{5} + 30 \cdot \frac{1}{7} + 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{761}{42}.$$

Таблица 7

Матрица планирования транспортной задачи

Матрица планирования		Потребители				Запасы
		b_1	b_2	b_3	b_4	
Постав-щики	$u_i \backslash v_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	
A_1	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{5}$ *10*	$\frac{1}{4}$	M	$\frac{1}{5}$ *35*	*45*
A_2	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$ *20*	$\frac{1}{3}$	M	*20*
A_3	*0*	M	$\frac{1}{6}$ *0*	$\frac{1}{7}$ *30*	$\frac{1}{6}$ *5*	*35*
Потребности		*10*	*20*	*30*	*40*	*100*

Строим систему потенциалов. О методе построения системы потенциалов достаточно материала в лекциях или в литературе. Построенная система потенциалов показывает, что опорный план оказался оптимальным, поэтому суммарная производительность всех механизмов максимальна и равна

$F_{max} = 50+35-5+100+210+30 = 565$ (шт./ед. времени).

Таким образом, оптимальное распределение механизмов по участкам работ следующее:

$$X^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 5 \end{pmatrix} \qquad F_{max} = 565 \text{ (ед.)}.$$

В заключение отметим, что в заданиях на контрольную работу могут быть даны для решения самые разнообразные виды транспортных задач, например, открытые модели, требующие предварительного приведения к закрытой путем ввода в матрицу планирования либо дополнительного столбца, либо дополнительной строки или с разнообразными усложнениями в исходных постановках. Для успешного их решения следует обратиться к лекционному материалу либо к соответствующей литературе по данной теме.

4. Решение задачи нелинейного программирования методом множителей Лагранжа

ПК-1.2 Исследует характер поведения основных параметров построенных математических моделей сложных социально-экономических и природных динамических систем

ПК-2.2 Создает комплексы программ для вычисления параметров компьютерных моделей сложных социально-экономических и природных динамических систем и исследованию их характера поведения на основе современных ин-

Условия задачи.

Используя метод множителей Лагранжа, определить глобальные экстремумы функции в задаче нелинейного программирования:

$$Z = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1 \text{ при условии } x_1^2 + x_2^2 = 4.$$

Решение.

Вводим набор переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$, называемых множителями Лагранжа и составляем функцию Лагранжа, используя общую формулу:

$$F(x_1,x_2, \ldots ,x_n;y_1,y_2, \ldots ,y_m) = f(x_1,x_2, \ldots ,x_n)+ \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \left[b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right],$$

где $gi(x_i,x_2, \ldots ,x_n)$ - левая часть ограничений, b - их правая часть, $f(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ - целевая функция задачи $(i = 1, \ldots, m)$.

Множителей Лагранжа вводится столько, сколько существует ограничений. В данном случае вводим один множитель, составляем функцию Лагранжа:

$$F(x_1,x_2,y) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1 + y \cdot \left(4 - x_1^2 - x_2^2\right).$$

Далее вычисляются частные производные по основным переменным и по множителю Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} y_i \cdot \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 & (j = 1,\ldots,n); \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 & (i = 1,\ldots,m). \end{cases}$$

Эти частные производные приравниваются к 0 и таким образом получается система $m+n$ уравнений с $m+n$ переменными. В нашем случае

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 6x_1 - 3 - 2yx_1 = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 4x_2 - 2yx_2 = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 4 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Итак, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 - 3 - 2yx_1 = 0; \\ 4x_2 - 2yx_2 = 0; \\ 4 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Найдем стационарные точки, в которых выполняются эти уравнения. Возьмем уравнение $4x_2$ - $2\backslash x_2 = 0$ или $4x_2 = 2yx_2$; $2x_2 = yx_2$.

Это условие может быть выполнено при $x_2 = 0$.

Тогда $x_1 = \sqrt{4} = \pm 2$, т.е. имеются 2 точки: (-2; 0) и (2; 0).

Если же допустить в том же уравнении $2x_2 = yx_2$, что $x_2 * 0$, тогда $y=2$. Отсюда находим

$$6x_1 - 3 - 2 \cdot 2x_1 = 0;\ 2x_1 = 3;\ x_1 = \frac{3}{2}; \quad x_2 = \sqrt{4 - x_1^2} = \sqrt{4 - \frac{9}{4}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Таким образом, получаются еще две точки $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Среди найденных 4 стационарных точек найдем такие, в которых наблюдается глобальный экстремум:

В точке (–2; 0) $Z = 3 \cdot 4 + 0 + 3 \cdot 2 + 1 = 19$.

В точке (2; 0) $Z = 3 \cdot 4 + 0 - 3 \cdot 2 + 1 = 7$.

В точке $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right) Z = 3 \cdot \frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{7}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{27}{4}$.

В точке $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right) Z = 3 \cdot \frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{7}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{27}{4}$.

Простым сравнением полученных значений для целевой функции Z выбираем те точки, в которых найден максимум и минимум этой функции.

Глобальный минимум $Z_{\min} = \frac{27}{4}$ достигается в точках $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ глобальный максимум - в точке (-2; 0).

Также отметим, что в заданиях на контрольную работу могут встретиться задачи нелинейного программирования, имеющие нелинейность как только в целевой функции, либо только в ограничениях задачи, так там и там, как в разобранном примере. Также и задание может быть иным, например, решить задачу графическим способом или с применением теоремы Куна-Таккера.

6. Задача на регрессионный анализ

ПК-2.2 Создает комплексы программ для вычисления параметров компьютерных моделей сложных социально-экономических и природных динамических систем и исследованию их характера поведения на основе современных информационных технологий и сетевых ресурсов

Условия задачи.

Экономист исследует затраты на потребление воды с помощью множественного регрессионного анализа. Для этого он использует наблюдения за расходом воды и рядом других переменных в течение года (табл. 8). Составить множественное уравнение регрессии и вычислить коэффициент детерминации.

Решение.

Множественное уравнение регрессии (для двух признаков- факторов) имеет вид

$$\tilde{y}_x = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2,$$

где y_x - теоретические значения линии регрессии; $x_ъ$ x_2 - факторы (признаки); $в_о$, $в_ъ$ $в_2$ - параметры уравнения, показывающие степень влияния факторов на исследуемую величину.

Таблица 8

Наблюдения за расходом воды в течение года

№ п/п	Объем ежемесячной реализации продукции, млн. руб. x_1	Численность рабочих, занятых на производстве x_2	Ежемесячный расход воды (м^3) y
1	81	1295	3070
2	54	1441	2828
3	58	1453	2891
4	62	1579	2994
5	128	1633	3082
6	136	1795	3198
7	120	1753	3502
8	113	1469	3060
9	127	1504	3211
10	136	1572	3286
11	167	1953	3542
12	133	1553	3125

Параметры находим из системы, полученной по методу наименьших квадратов:

$$\begin{cases} n\beta_0 + \beta_1 \sum x_1 + \beta_2 \sum x_2 = \sum y, \\ \beta_0 \sum x_1 + \beta_1 \sum x_1^2 + \beta_2 \sum x_2 x_1 = \sum y \cdot x_1, \\ \beta_0 \sum x_2 + \beta_1 \sum x_1 x_2 + \beta_2 \sum x_2^2 = \sum y \cdot x_2 \end{cases}$$

с использованием расчетной таблицы (табл. 9)

Таблица 9

Расчетная таблица

x_1	x_2	y	$y \cdot x_1$	x_1^2	$x_2 \cdot x_1$	x_2^2	$y \cdot x_2$
81	1295	3070	248670	6561	104895	1677025	3975650
54	1441	2828	152712	2916	77814	2076481	4075148
58	1453	2891	167678	3364	84274	2111209	4200623
62	1579	2994	185628	3844	97898	2493241	4727526
128	1633	3082	394496	16384	209024	2666689	5032906
136	1795	3198	434928	18496	244120	3222025	5740410
120	1753	3502	420240	14400	210360	3073009	6139006
113	1469	3060	345780	12769	165997	2157961	4495140
127	1504	3211	407797	16129	191008	2262016	4829344
136	1572	3286	446896	18496	213792	2471184	5165592
167	1953	3542	591514	27889	326151	3814209	6917526
133	1553	3125	415625	17689	206549	2411809	4853125
1315	19000	37789	4211964	158937	2131882	30436858	60151996

$$\begin{cases} 12\beta_0 + 1315\beta_1 + 19000\beta_2 = 37789; \\ 1315\beta_0 + 158937\beta_1 + 2131882\beta_2 = 4211964; \\ 19000\beta_0 + 2131882\beta_1 + 30436858\beta_2 = 60151996. \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса (табл. 10).

Таблица 10

Расчетная таблица

β_0	β_1	β_2	y
$\boxed{12}$	1315	19000	37789
1315	158937	2131882	4211964
19000	2131882	30436858	60151996
1	109,58	1583,33	3149
0	$\boxed{14839{,}3}$	49803,1	71029
0	49862	353588	320996
1	0	1215,58	2624,55
0	1	3,356	4,786
0	0	$\boxed{186243{,}1}$	82329,22
1	0	0	2087,26
0	1	0	3,3
0	0	1	0,42

$$\beta_0 = 2087{,}26; \qquad \beta_1 = 3{,}3; \qquad \beta_2 = 0{,}442.$$

Искомое уравнение регрессии примет вид

Для расчета коэффициента детерминации вычислим теоретические значения линии регрессии $\sim_x$, квадраты отклонений эмпирических значений от теоретических и от средней. Данные расчета сводим в таблицу (табл. 11).

Таблица 11

Данные расчета

	y	$\tilde{y}_i$	$(y-\tilde{y}_i)^2$	$(y-\bar{y})^2$ ($\bar{y}=3149$)
	3070	2926,9	20477,6	6241
	2828	2902,4	5535,36	103041
	2891	2920,8	888,04	66564
	2994	2989,8	17,64	24025
	3082	3231,4	22320,36	4489
	3198	3329,4	17265,96	2401
	3502	3258	59536	124609
	3060	3109,5	2450,25	7921
	3211	3171,1	1592	3844
	3286	3230,9	3036	18769
	3542	3501,6	1632,16	154449
	3125	3212,6	7673,76	576
Итого			142425,13	516929

Коэффициент детерминации находим по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{N-1}{N-m-1}\left[1-(R')^2\right],$$

где N - объем выборки; m - число факторов, R - коэффициент корреляции.

Вывод: связь между признаками-факторами и результативным фактором является средней, т.к. $0,4 < R^2 < 0,7$.

В заданиях на контрольную работу будут встречаться задачи и на множественный регрессионный анализ, но чаще на парную регрессию с разнообразными видами зависимостей, далеко не всегда линейными.

$$(R')^2 = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y}_x)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{142425{,}13}{516929} = 0{,}731;$$

$$R^2 = 1 - \tfrac{11}{9} \cdot [1 - 0{,}731] = 0{,}6712.$$

7. Задача на теорию матричных игр

ПК-2.2 Создает комплексы программ для вычисления параметров компьютерных моделей сложных социально-экономических и природных динамических систем и исследованию их характера поведения на основе современных информационных технологий и сетевых ресурсов

Условия задачи.

Найти графически решение и цену игры

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Проверим наличие седловой точки в данной матрице. Для этого найдем минимальные элементы в каждой из строк и максимальные элементы в каждом столбце:

$$\begin{array}{cc} & min \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 0{,}5 \end{array} \\ \begin{array}{lcccc} max & 2 & 3 & 5 & 3 \end{array} & \end{array}$$

$\uparrow \quad \uparrow$

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры:

$a = \max\limits_{i} \min\limits_{j} c_{ij};$

$b = \min\limits_{j} \max\limits_{i} c_{ij}.$

$a \le v \le b$, где v - цена игры.

$a = \max\limits_{i}\{1; 0{,}5\} = 1; \quad b = \min\limits_{j}\{2; 3; 5; 3\} = 2.$

$a \ne b$, следовательно, седловой точки в игре нет. $1 \le v \le 2$.

Найдем решение игры в смешанных стратегиях графическим способом. Для этого на оси абсцисс отложим отрезок, длина которого равна единице. Левый конец отрезка соответствует чистой стратегии A_2, правый - стратегии A_1. Промежуточные точки p соответствуют некоторым смешанным стратегиям $(p_1; p_2)$, где $p_1 = p$, а $p_2 = 1 - p_1 = 1 - p$. На концах выбранного отрезка проведем прямые, перпендикулярные оси абсцисс; на них будем откладывать выигрыши при соответствующих чистых стратегиях. Построим прямые:

$$u_1(p) = 2p - (1-p) = 2p - 1 + p = 3p - 1;$$
$$u_2(p) = p - 3(1-p) = p - 3 + p = 2p - 3;$$
$$u_3(p) = 5p - 4(1-p) = 5p - 4 + 4p = 9p - 4;$$
$$u_4(p) = 3p - 0{,}5(1-p) = 3p - 0{,}5 + 0{,}5p = 3{,}5p - 0{,}5;$$

$u_j(p)$ - прямые, выражающие ожидаемый средний выигрыш первого игрока, применяющий *i-ю* стратегию с вероятностью *p* при условии, что второй игрок отвечает чистой стратегией *j*.

Из рисунка 2. следует, что ломаная АВСП является нижней границей выигрыша, получаемого игроком А.

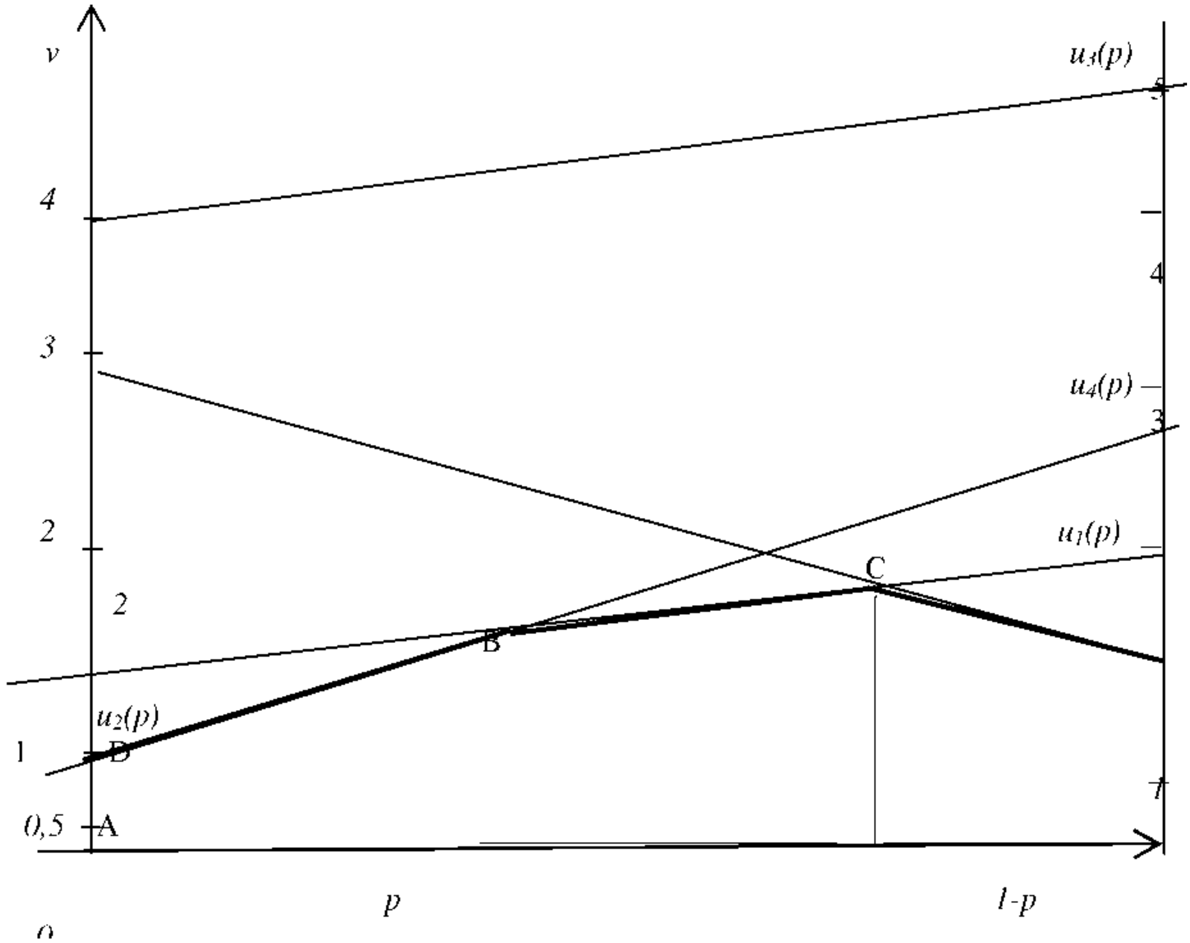

Рис. 2. Геометрическое решение игры

Ординаты точек ломаной определяют минимальный выигрыш игрока А при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке С, т.к. она имеет максимальную ординату среди точек В и С. Таким образом, этой точке С соответствует оптимальная смешанная стратегия, а ее ордината равна цене игры. Так как точка C получена при пересечении $u_1(-p)$ и $u_2(p)$, соответствующих 1-й и 2-й стратегии игрока B, стратегии 1-я и 2-я игрока B - активные (отмечены выше стрелкой).

Следует особо подчеркнуть, что график нужен только для определения активных стратегий, получать же v и p из графика не следует. Эти величины необходимо вычислять аналитически. Покажем, как это делается. Итак, матрица игры у нас усеклась до следующей

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$p_{опт.} = \frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} - c_{21} - c_{12} + c_{22}}; \qquad 0 \le p_{опт.} \le 1;$$

p - вероятность использования стратегий первой стороной;

$$q_{опт.} = \frac{c_{22} - c_{12}}{c_{11} - c_{21} - c_{12} + c_{22}}; \qquad 0 \le q_{опт.} \le 1.$$

q - вероятность использования стратегий второй стороной.

В нашем случае $p_1 = \dfrac{3-1}{2-1-1+3} = \dfrac{2}{3}$; $p_2 = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

$$P^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

$$q_1 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}; \qquad q_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \qquad q_3 = q_4 = 0.$$

$$Q^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0; 0\right).$$

Цена игры находится по формуле

$$v = \frac{c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21}}{c_{11} - c_{21} - c_{12} + c_{22}}; \qquad v = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 1}{3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

v входит в заданный интервал *(1; 2)*.

В задании на матричные игры также могут встретиться разнообразные требования способа их решения: с помощью представления матричной игры в виде пары двойственных задач линейного программирования и решения их симплекс-методом, предварительного применения доминирования и т. п.

8. Задача сетевого планирования и управления

ПК-1.2 Исследует характер поведения основных параметров построенных математических моделей сложных социально-экономических и природных динамических систем

ПК-2.2 Создает комплексы программ для вычисления параметров компьютерных моделей сложных социально-экономических и природных динамических систем и исследованию их характера поведения на основе современных информационных технологий и се-

Условия задачи.

На рисунке 3 приведен сетевой график. Продолжительность работ в днях указана рядом с графическим изображением каждой работы.

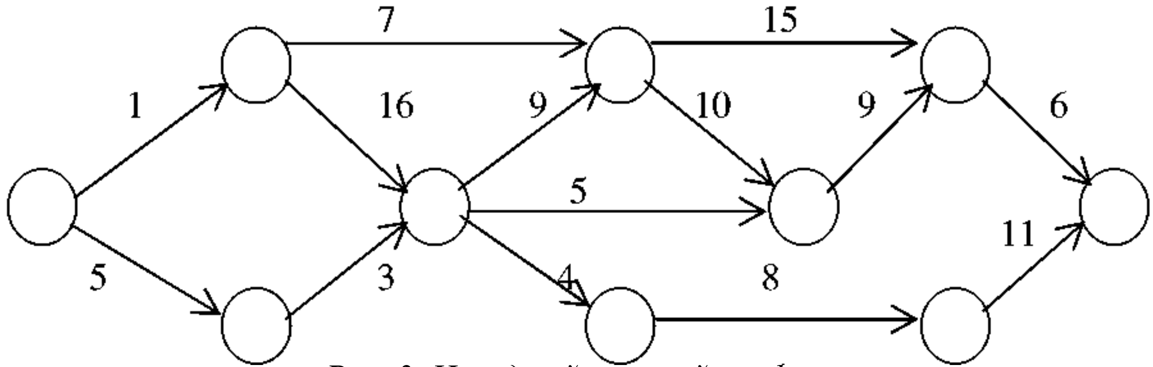

Рис. 3. Исходный сетевой график

Необходимо:

а) пронумеровать события;

б) выделить критический путь и найти его длину;

в) определить все временные характеристики сетевого графика;

г) определить коэффициенты напряженности работ;

д) построить линейный график сетевой модели.

Решение.

1. Нумерацию событий проводим следующим образом: исходному событию присваивается №1 и вычеркиваются все исходящие из него работы (стрелки). На оставшейся сети вновь находим событие, в которое не входит ни одна работа. Указанному событию присваивается №2. Затем вычеркиваем работы, выходящие из события №2, и вновь находим на оставшейся сети событие, в которое не входит ни одна работа. Присваиваем ему №3 и т.д. до завершающего события. Если при очередном вычеркивании окажутся одновременно два события, не имеющие входящих в них работ, то номера этим событиям присваиваем произвольно. Это так называемый метод вычеркивания. В результате его выполнения получаем сетевую модель, представленную на рис.4.

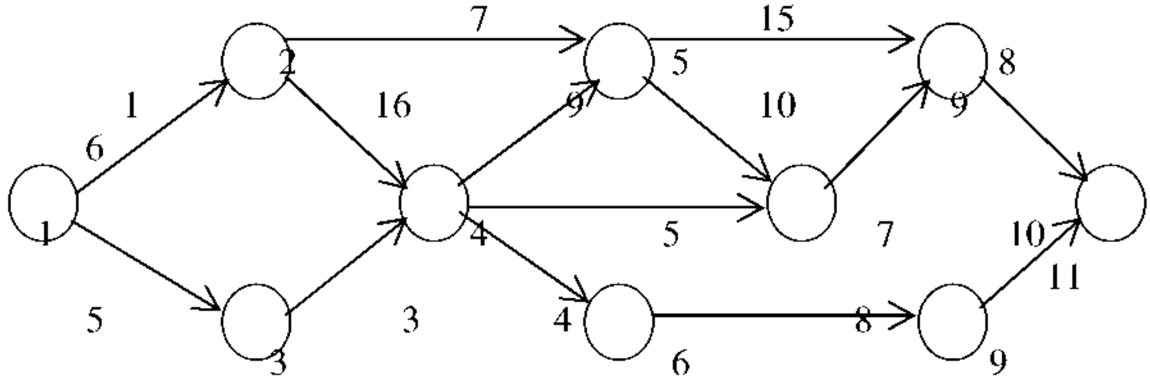

Рис. 4. Упорядоченный сетевой график

2. Для выделения критического пути и определения временных характеристик сети строим таблицу (см. табл. 12).

I этап. Заполнение таблицы начинаем с заполнения «побочных» квадратов (не стоящих на главной диагонали), где в числителе занятых квадратов записываем продолжительность соответствующей работы.

IIэтап. Вычисляем знаменатели «побочных» квадратов выше главной диагонали и числители «главных» квадратов. Знаменатель каждого «побочного» квадрата выше главной диагонали равен сумме числителя «главного» квадрата и числителя «побочного» квадрата в данной строке. Числитель первого «главного» квадрата равен 0, числители следующих квадратов равны максимальному значению знаменателей «побочных» квадратов в данном столбце выше «главной» диагонали.

Таблица12

Таблица расчетов

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	5/5	1/1							
2	5/9	5/14		3/8						
3	1/0		1/1	16/17		7/8				
4		3/14	16/1	17/17	4/21	9/26				
5				4/28	21/32				8/29	
6			7/19	9/17		26/26	10/36	15/41		
7						10/26	36/36	9/45		
8						15/30	9/36	45/45		6/51
9					8/32				29/40	11/40
10								6/45	11/40	51/51

III этап. Вычисляем знаменатели «побочных» квадратов ниже главной диагонали и знаменатели «главных» квадратов. Знаменатель каждого «побочного» квадрата ниже главной диагонали равен разности между знаменателем «главного» квадрата в этой строке и числителем данного «побочного» квадрата. Знаменатели «главных» квадратов равны минимальному значению знаменателей «побочных» квадратов в данном столбце.

Все этапы проделаны в исходной таблице 12.

События, расположенные на «главной» диагонали и имеющие равные числитель и знаменатель, являются событиями критического пути. Его длина $t_{Кр}=51$ (сутки). Критический путь проходит через события 1^3^4^6^7^8^10. Отсюда весь комплекс работ не может быть завершен ранее, чем за 51 сутки.

3. Временные характеристики определим по этой же таблице. Эти характеристики можно, конечно, получать и по формулам, данным в лекционном курсе или в литературе, а не таким образом.

Получаем временные характеристики сетевого графика:

- самые ранние сроки свершения событий (величины числителей «главных» квадратов), $t_p(j)$, сутки;

- самые поздние сроки свершения событий (величины знаменателей «главных» квадратов), $t_п(i)$, сутки;

- резервы времени для событий: $R(i) = t_п(i) - t_p(j)$, сутки;

- самые ранние сроки окончания работ (знаменатели «побочных» квадратов выше главной диагонали), $t_p(i,j)$, сутки;

- самые поздние сроки начала работ (знаменатели «побочных» квадратов ниже главной диагонали), $t_п(i,j)$, сутки;

- полные резервы времени для работ, которые равны разности между знаменателями «главных» квадратов и знаменателями «побочных» квадратов выше главной диагонали.

Данные расчетов сводим в таблицу 13 и таблицу 14.

Таблица 13

Данные расчетов

Событие	Самые ранние сроки $t_p(j)$, сут.	Самые поздние сроки $t_п(i)$, сут.	Резерв времени, $R(i)=t_п(i)-t_p(j)$, сут.
1	0	0	0
2	5	14	9
3	1	1	0
4	17	17	0
5	21	32	11
6	26	26	0
7	36	36	0
8	45	45	0
9	29	40	11
10	51	51	0

Таблица 14

Данные расчетов

Работа	Самые ранние сроки окончания работы $t_p(i,j)$, сут.	Самые поздние сроки начала работы $t_n(i)$, сут.	Резерв времени (полный) для работы $R_n(i,j)$, сут.
(1,2)	5	9	9
(1,3)	1	0	0
(2,4)	8	14	9
(3,4)	17	1	0
(3,6)	8	19	18
(4,5)	21	28	11
(4,6)	26	17	0
(4,7)	22	31	14
(5,9)	29	32	11
(6,7)	36	26	0
(6,8)	41	30	4
(7,8)	45	36	0
(8,10)	51	45	0
(9,10)	40	40	11

Для критических работ резервы времени отсутствуют.

4. Определяем коэффициенты напряженности работ по формуле

$$K_н(i,j) = 1 - \frac{R_n(i,j)}{t_{кр.} - t'_{кр.}},$$

где: $R_n(i,j)$ - полный резерв времени работы i - j;

$t_{кр.}$ - длина критического пути;

$t'_{кр.}$ - продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем. Данные расчетов сводим в таблицу 15.

Таблица

Данные расчетов

Работа	События, через которые проходит максимальный путь L	Отрезок, на котором максимальный путь совпадает с критическим	$t'_{кр.}(i,j)$ сут.	$K_н(i,j)$
(1,2)	1→2→4→6→7→8→10	4→6→7→8→10	34	0,47
(1,3)	1→3→4→6→7→8→10	1→3→4→6→7→8→10	51	1
(2,4)	1→2→4→6→7→8→10	4→6→7→8→10	34	0,47
(3,4)	1→3→4→6→7→8→10	1→3→4→6→7→8→10	51	1
(3,6)	1→3→6→7→8→10	6→7→8→10; 1→3	26	0,3
(4,5)	1→3→4→5→9→10	1→3→4	17	0,68

(4,6)	1→3→4→6→7→8→10	1→3→4→6→7→8→10	51	1
(4,7)	1→3→4→7→8→10	7→8→10;1→3→4	32	0,26
(5,9)	1→3→4→5→9→10	1→3→4	17	0,68
(6,7)	1→3→4→6→7→8→10	1→3→4→6→7→8→10	51	1
(6,8)	1→3→4→6→8→10	1→3→4→6; 8→10	32	0,78
(7,8)	1→3→4→6→7→8→10	1→3→4→6→7→8→10	51	1
(8,10)	1→3→4→6→7→8→10	1→3→4→6→7→8→10	51	1
(9,10)	1→3→4→5→9→10	1→3→4	17	0,68

Распределим работы по зонам напряженности (см. табл. 16).

Таблица 16

Данные расчетов

Зона	Работа
Критическая $K_н(i,j) > 0,8$	(1,3); (3,4); (4,6); (6,7); (7,8); (8,10)
Подкритическая $0,6 \le K_н(i,j) \le 0,8$	(4,5); (5,9); (6,8); (9,10)
Резервная $K_н(i,j) < 0,6$	(1,2); (2,4); (3,6); (4,7)

5. При построении линейной диаграммы, которая дает четкое представление о порядке следования работ и по которой легко определить те работы, которые должны выполняться в каждый данный момент времени, каждая работа изображается параллельным оси времени отрезком, длина которого равна продолжительности этой работы. По оси *Oy* откладывается количество работ. При наличии фиктивной работы нулевой продолжительности (в рассматриваемой сети ее нет) она изображается точкой.

События *i* и *j*, начало и конец работы *(i,j)* помещают, соответственно, в начале и конце отрезка. Отрезки располагают один над другим, снизу вверх в порядке возрастания индекса *i*, а при одном и том же *i* - в порядке возрастания индекса *j*.

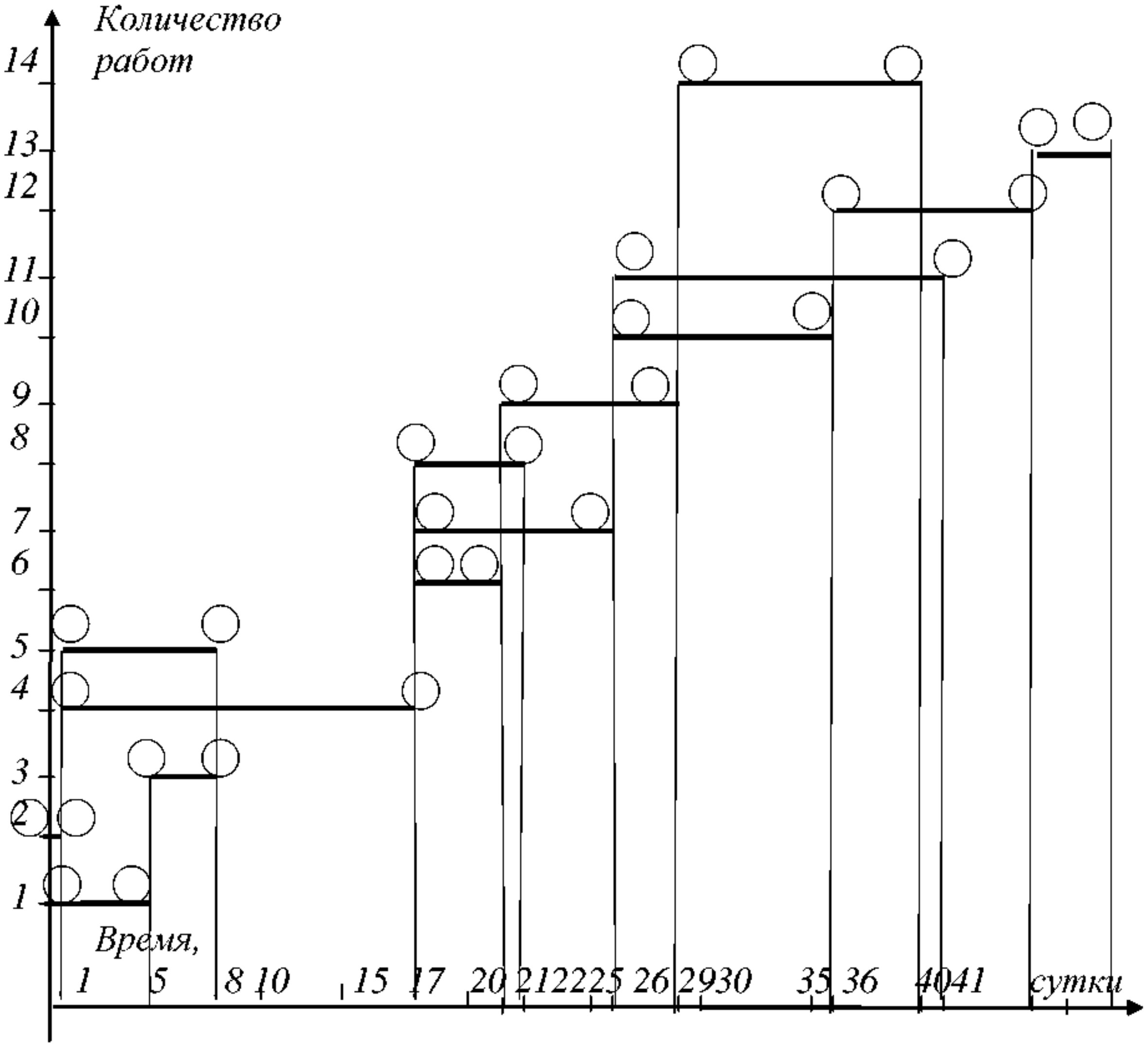

Рис. 4. Линейная диаграмма проекта

По линейной диаграмме проекта (см. рис. 4.) можно определить критическое время, критический путь, а также резервы времени всех работ. Так, критическое время комплекса работ равно координате на оси времени самого правого конца всех отрезков диаграммы.

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

а) Основная литература

1. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. Мир. 2008. http://www.nbpublish.com/library_read_article.php?id=-30093
2. А.Б.Каток, Б. Хасселблат. Введение в современную теорию динамических систем. М., Факториал, 2009.
3. Петровский А.Б. Теория принятия решений. -М.: Академия, 2014, -400с.

б) Дополнительная литература

1. 1. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений - М.: Наука, 1918.-288 с. URL: http://nlp.stanford.edu/pubs/SocherHuvalManningNg_EMNLP2012.pdf
2. Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества. - М.: Мир. 2017. - 368 с. URL: http://citese- erx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.88.1863&rep=rep1&type=pdf
3. Дубров А.М., Лагоша Б. А., Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуа¬ций в экономике и бизнесе. - М.: Финансы и статистика, 2018. - 176с. URL: http://www.deepsky.com/~merovech/voynich/voynich_manchu_ref- erence_materials/PDF s/j urafsky_martin.pdf

1. The Stanford Natural Language Processing Group http://nlp.stanford.edu/
2. Апресян Ю. Д. Идеи и методы современной теории катастроф. М.: Просвещение, 1966. 305 с.
3. Ануреев И.С., Батура Т.В., Боровикова О.И., Загорулько Ю.А., Кононенко И.С., Марчук А.Г., Марчук П.А., Мурзин Ф.А., Сидорова Е.А., Шилов Н.В. Модели и методы построения информационных систем. // Моногр. / Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН. - Новосибирск: Изд. СО РАН, 2009.
4. Заде Л. Теория катастроф и применение ее к принятию приближеных решений. - М., 1976. - 166 с.

2) Программное обеспечение

а) Лицензионное программное обеспечение

1. Russian бесплатно Cadence SPB/OrCAD 16.6 Государственный контракт на по¬ставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009

2. Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows Акт на передачу прав №2129 от 25 октября 2016 г.

3. Mathcad 15 M010 Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011;

4. MATLAB R2012b Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012;

5. Microsoft Visual Studio Ultimate 2013 с обновлением 4 Акт предоставления прав № Tr035055 от 19.06.2017

6. Microsoft Windows 10 Enterprise Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017

7. MS Office 365 pro plus Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017

б) Свободно распространяемое программное обеспечение

1. Adobe Acrobat Reader DC

2. Git version 2.5.2.2

3. Google Chrome бесплатно

4. Lazarus 1.4.0

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. http://elementy.ru - «Элементы большой науки»
2. http://www.astronet.ru/- Российская астрономическая сеть
3. https://www.wikipedia.org/ - Википедия - свободная энциклопедия

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. ЭБС "Издательство Лань"
2. ЭБС ZNANIUM.COM
3. ФГБУ "РГБ"
4. ЭБ eLibrary
5. American Institute of Physics
6. American Physical Society - APS Online Journals
7. EBSCO Publishing - INSPEC
8. Web of Science
9. SCOPUS
10. ЭБС "Университетская библиотека онлайн"

ТвГУ имеет подписку на коллекцию из 331 российских журналов в полнотекстовом электронном виде, в том числе:

1. Alma mater (Вестник высшей школы)
2. Вопросы статистики
3. Журнал вычислительной математики и математической физики
4. Известия высших учебных заведений. Математика
5. Известия Российской академии наук. Серия физическая
6. Известия Российской академии наук. Теория и системы управления
7. Инновации в образовании
8. Стандарты и качество
9. Школьные технологии
10. Интернет-ресурсы, используемые при освоении дисциплины:
11. http://elementy.ru - «Элементы большой науки»
12. http://www.astronet.ru/- Российская астрономическая сеть
13. https://www.wikipedia.org/ - Википедия - свободная энциклопедия

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины.

VI.1.1 Список вопросов к экзамену.

1. Графический метод решения задач линейного программирования.
2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования.
3. Задача целочисленного программирования (метод Гомори).
4. Транспортная задача (метод потенциалов).
5. Задача нелинейного программирования (метод множителей Лагранжа).
6. Задача на регрессионный анализ. Применение статистических методов.
7. Задача теории матричных игр.
8. Задача сетевого планирования и управления.
9. Теория как форма научного знания. Проблемы методологии и методов научного познания.
10. Способы и методы познания. В чем отличие? Специфика методов научного познания.
11. Исследовательский процесс. Решение научной проблемы.
12. Уровни методов научного познания. Проблема истинности полученного знания.
13. Место истории в системе наук, особенности объекта и методов исторического познания.
14. Проблема «социологических» и «исторических» законов. Взаимосвязь между историческими законами и общесоциологическими законами в определенных конкретно-исторических условиях. Уровни сущности.
15. Общественно-историческое развитие. Проблемы альтернативности в историческом развитии. Сложность общественно-исторического развития и трудности в его познании.
16. Объективные и субъективные предпосылки возникновения альтернативной ситуации в исторической реальности.
17. Ход общественно-исторического развития в его альтернативных вариантах и вероятностные законы.

18. Исторический источник и исторический факт, учение об информации. Информация – отражение реального мира. Проблема повышения информативной отдачи исторических источников.
19. Источниковедение. Классификация источников. Методы получения, хранения, сбора и классификация информации. Характеристика.
20. Исторический факт, определение. Основные черты фактов исторической действительности.
21. Методы исторического исследования. Общенаучные методы и их место в историческом исследовании.
22. Метод изучения внутренней сущности и законов функционирования и развития сложных систем.
23. Диалектико-материалистический, интегрально-аналитический, дедуктивный методы научного познания - восхождение от абстрактного к конкретному. Характеристика методов.
24. Эмпирический, индуктивно-аналитический методы научного познания - восхождение от конкретного к абстрактному. Характеристика методов.
25. Классификация методов системного анализа. Достоинства.
26. Методология исторической науки. Основные методы исторического исследования. Традиционные и нетрадиционные.
27. Основные общеисторические методы научного исследования: Историко-генетический; историко-сравнительный; историко-типологический; историко-системный. Характеристика. Историческая ситуация.
28. Роль понятий и категорий в историческом исследовании. Структура и уровни исторического исследования.
29. Структура и уровни исторического исследования. Постановка исследовательской задачи. Историография, понятие.
30. Реконструкция исторической реальности и эмпирический уровень ее познания. Основные определения. Объяснение и теоретический уровень в историческом познании.

31. Количественные методы в историческом исследовании. Основные методы математико-статистического анализа.
32. Место количественных методов в исторических исследованиях. Математизация научных исследований и ее проявления в исторической науке.
33. Формализация и измерение исторических явлений. Общие проблемы формализации и измерения общественных явлений.
34. Особенности измерения исторических явлений, причины ошибок измерения. Систематические и случайные ошибки.
35. Элементарные сведения о фракталах и катастрофах.
36. Основные понятия о фракталах.
37. Концепция фрактальной кривой, как толстой линии.
38. Метод определения фрактальной размерности временных рядов.
39. Фрактальная шкала температур.
40. Введение в теорию катастроф.
41. Определяющие функции с одной переменной состояния.
42. Фрактальная модель социально-экономических процессов.
43. Основное уравнение мультифрактальной динамики.
44. Исследование решений основного уравнения мультифрактальной динамики.
45. Катастрофы и управление катастрофами в модели мультифрактальной динамики.
46. Система уравнений фрактальной модели с двумя взаимосвязанными параметрами состояния.
47. Фрактальная размерность временного ряда как "флаг" катастроф в природных социально-экономических процессах.
48. Управление катастрофами во фрактальной модели.
49. Направленность экономических процессов, описываемых мультифрактальными кривыми.
50. Классификация динамик социально-экономических процессов по значению фрактальной размерности в рамках модели мультифрактальной динамики.

51. Прогноз на основе фрактальных параметров системы.
52. Классификация социально-экономических процессов по значению фрактальной размерности.
53. Схема прогноза динамики мультифрактальных систем.
54. Фрактальный анализ валютных временных рядов
55. Нелинейная фрактальная модель валютного кризиса.
56. Валютный кризис и бифуркационные явления в рамках фрактальной модели.
57. Описание динамики нефтяных цен в рамках фрактальной модели.
58. Прогноз динамики нефтяных цен.
59. Факторы управления нефтяными ценами.
60. Фрактальная модель роста народонаселения
61. Расчет фрактальной размерности кривой динамики народонаселения
62. Анализ результатов и прогноз роста народонаселения
63. Фракталы и дискретные динамические системы в гуманитарных науках.
64. Методы математического моделирования в гуманитарных науках.
65. Математические модели в исторических науках.
66. Математические модели в филологических науках.
67. Математические модели в музыке и искусстве.

VII. Материально-техническое обеспечение

Набор учебной мебели, Меловая доска, Переносной ноутбук, Компьютер:(процессор Core i5-2400+монитор LC E2342T (10шт.)

Графопроектор, мультимедийный комплект учебного класса (вариант № 1) Проектор Casio XJ-M140, кронштейн, кабель, удлинитель, настенный проекц. экран Lumien 180*180.

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Реквизиты документа, утвердившего изменения
1.			
2.			