

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 30.08.2023 11:30:02  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Утверждаю:

Руководитель ООП:

\_\_\_\_\_ Шаров Г.С.

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

## **Численное моделирование в математической физике**

Направление подготовки  
02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование  
информационных систем

Профиль подготовки  
Математические основы информатики

Для студентов 4 курса

Форма обучения  
Очная

Уровень высшего образования  
БАКАЛАВРИАТ

Составитель:

д.ф.м.н., профессор Г.С. Шаров

Тверь 2023

## I. Аннотация

### 1. Цели и задачи дисциплины

Целями освоения дисциплины являются:

- 1) фундаментальная подготовка в области уравнений с частными производными;
- 2) овладение аналитическими и численными методами математической физики для дальнейшего использования в приложениях.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Численное моделирование в математической физике» входит в вариативную часть блока, формируемого участниками образовательных отношений. Она является продолжением курса «Дифференциальных уравнений». Для ее успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения дисциплинам: математический анализ, дифференциальные уравнения, функциональный анализ и др.

### 3. Объём дисциплины:

5 зачетных единицы, 180 академических часов, в том числе контактная работа: лекции – 48 часов, практические занятия – 48 часов, самостоятельная работа – 66 часов.

#### Год набора 2015, 2016:

4 зачетных единицы, 144 академических часа, в том числе контактная работа: лекции – 58 часов, практические занятия – 55 часов, в т.ч. практическая подготовка – 4 часа; самостоятельная работа – 77 часов.

### 4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя её базовые составляющие УК-1.2 Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи
ПК-1 Способен использовать базовые знания в области математических и естественных наук, программирования и информационных технологий	ПК-1.1 Формулирует проблемы и определяет направление их решения на основе базовых знаний математики, естественных наук, программирования и информационных технологий ПК-1.2 С помощью стандартных методов решает типовые задачи в области математики, естествознания и информатики ПК-1.3 Применяет методы и приемы из области ма-

	тематики, физики и информатики для решения задач профессиональной деятельности
ПК-2 Способен проводить под научным руководством исследование на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-2.2 Работает с научной литературой и другими источниками научно-технической информации

## 5. Форма промежуточного контроля

Зачёт – 7 семестр; экзамен – 8 семестр.

## 6. Язык преподавания русский.

## II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

### 1. Для студентов очной формы обучения

Наименование разделов и тем		Всего часов	Аудиторные занятия		Самост. работа
Разделы	Темы		Лекции	практич. занятия	
1. Обзор и классификация основных уравнений с частными производными. Задачи Коши для уравнений гиперболического типа.  1 ЗЕ	1. Вывод уравнений колебаний струны, теплопроводности, Лапласа. Классификация уравнений второго порядка. Инвариантность типа уравнения при заменах независимых переменных. Характеристики уравнений второго порядка, их инвариантность при заменах независимых переменных. Метод характеристик.	8	2	2	4
	2. Канонический вид уравнения второго порядка, приведение уравнения к каноническому виду в случае двух независимых переменных и $n$ переменных. Общие решения уравнений. Решение задачи Коши для уравнения гиперболического типа на плоскости. Теорема Коши - Ковалевской.	10	2	2	6
	3. Волновое уравнение. Постановка задачи Коши и начально-краевых задач для него. Характеристический конус. Единственность решения задачи Коши и первой начально-краевой задачи для волнового уравнения.	8	2	2	4
	4. Решение задач Коши для волнового уравнения для $n = 1, 2, 3$ пространственных переменных. Формулы Даламбера, Кирхгоффа и Пуассона.	10	2	2	6

Наименование разделов и тем		Всего часов	Аудиторные занятия		Самост. работа
Разделы	Темы		Лекции	практич. занятия	
2. Задачи для уравнения теплопроводности.  1 ЗЕ	Уравнение теплопроводности. Постановка для него задачи Коши и начально-краевых задач. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности и для волнового уравнения с помощью степенных рядов и интегральных формул..	24	4	11	9
	Принцип максимума для уравнения теплопроводности, единственность решения первой начально-краевой задачи и задачи Коши в классе ограниченных функций.	12	2	3	7
3. Обобщенные функции и их приложения в теории уравнений с частными производными.  1 ЗЕ	Основные и обобщенные функции, регулярные $m$ и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, свертка обобщенных функций. Обобщенное решение уравнения, фундаментальное решение.	18	3	6	9
	Преобразование Фурье обобщенных функций, вычисление с его помощью фундаментальных решений. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Формула Пуассона для решения задачи Коши.	18	4	6	8
4. Метод Фурье, теория гармонических функций  1 ЗЕ	Метод Фурье для уравнения гиперболического и параболического типов. Свойства собственных чисел и собственных функций задачи Штурма - Лиувилля. Решение методом Фурье начально-краевых задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.	10	2	4	4
	Уравнения Лапласа и Пуассона, постановка краевых задач для уравнения Лапласа. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.	6	2	2	2
	Гармонические функции. Интегральное представление гармонических функций. Теоремы о среднем, теорема о максимуме и минимуме для гармонических функций.	8	2	4	2
	Решение методом Фурье начально-краевых задач для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Решение методом Фурье краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона в круге или кольце.и шаре.	6	2	2	2

Наименование разделов и тем		Всего часов	Аудиторные занятия		Самост. работа
Разделы	Темы		Лекции	практич. занятия	
	<p>Единственность решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Необходимое условие разрешимости и единственность (с точностью до аддитивной постоянной) решения внутренней задачи Неймана.</p> <p>Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, ее симметрия. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в <math>n</math>-мерном шаре при <math>n=2,3</math>.</p> <p>Единственность решения внешних задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа.</p>	6	1	2	3
Итого		144	30	48	66

### III. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

#### Перечень вопросов для подготовки к экзамену

1. Вывод уравнений колебаний струны, теплопроводности, Лапласа; физическая интерпретация краевых и начально-краевых задач для них.
2. Классификация уравнений второго порядка. Инвариантность типа уравнения при заменах независимых переменных.
3. Характеристики уравнений второго порядка, их инвариантность при заменах независимых переменных. Примеры характеристик для уравнений колебаний струны, теплопроводности.
4. Уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики уравнений второго порядка в случае двух независимых переменных.
5. Приведение уравнения гиперболического типа к каноническому виду в случае двух независимых переменных.
6. Приведение уравнений параболического и эллиптического типов к каноническому виду в случае двух независимых переменных.
7. Канонический вид линейного уравнения второго порядка, приведение уравнения с постоянными коэффициентами к каноническому виду в случае  $n$  переменных.
8. Задача Коши для уравнения с частными производными. Теорема Ковалевской.
9. Волновое уравнение. Постановка для него задачи Коши и начально-краевых задач, их физический смысл.
10. Единственность решения первой и второй начально-краевых задач для волнового уравнения. Интеграл энергии.
11. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения.

12. Формула Даламбера (решение задачи Коши для уравнения колебаний струны).
13. Формула Кирхгоффа (решение задачи Коши для однородного волнового уравнения в трехмерном пространстве).
14. Формула Пуассона (решение задачи Коши для однородного волнового уравнения на плоскости).
15. Уравнение теплопроводности. Постановка для него задачи Коши и начально-краевых задач, их физический смысл.
16. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности и для волнового уравнения с аналитическими начальными условиями с помощью степенных рядов.
17. Теорема о максимуме и минимуме для однородного уравнения теплопроводности.
18. Единственность решения первой начально-краевой задачи и задачи Коши для уравнения теплопроводности.
19. Обобщенные функции: определение,  $\delta$ -функция, дифференцирование обобщенных функций. Обобщенное решение дифференциального уравнения, фундаментальное решение дифференциального оператора.
20. Преобразование Фурье обобщенных функций. Инвариантность пространства основных функций относительно преобразования Фурье, фурье-образ производной обобщенной функции, производная фурье-образа. Примеры: фурье-образ  $\delta$ -функции и ее производной.
21. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности (вывод с помощью преобразования Фурье).
22. Свойства фундаментального решения уравнения теплопроводности.
23. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности и решение с его помощью задачи Коши для уравнения теплопроводности.
24. Задача Штурма - Лиувилля, возникающая при решении методом Фурье начально-краевых задач. Свойства собственных чисел и собственных функций задачи Штурма - Лиувилля.
25. Решение методом Фурье начально-краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов (без доказательства свойств собственных чисел и функций задачи Штурма - Лиувилля).
26. Постановка краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона. Гармонические функции, примеры.
27. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.
28. Гармонические функции. Интегральное представление гармонических функций.
29. Теоремы о среднем для гармонических функций.
30. Теорема о максимуме и минимуме для гармонических функций.
31. Единственность решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Необходимое условие разрешимости и единственность (с точностью до аддитивной постоянной) решения внутренней задачи Неймана.
32. Решение методом Фурье краевых задач для уравнения Лапласа в круге и кольце.
33. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в 3-мерном шаре.
34. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в 2-мерном круге.

35. Существование решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в 2-мерной области, сведение ее к задаче в круге с помощью конформного отображения.
36. Объемный (ньютоновский) потенциал, его существование, непрерывность, гармоничность в области без зарядов. Объемный потенциал, как решение уравнения Пуассона (Лапласа).
37. Поверхностные потенциалы простого и двойного слоя, их гармоничность.
38. Поверхностные потенциалы, предельные значения поверхностного потенциала двойного слоя.

**IV. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенций.**

<b>Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина</b>	<b>Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков (2-3 примера)</b>	<b>Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания</b>
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	Принцип Дирихле (с доказательством). Обобщенный принцип максимума. Единственность ограниченного решения обобщенной задачи Дирихле.	Уверенное владение, задание полностью выполнено – 7 баллов. Наличие отдельных ошибок – 3 – 6 баллов. Большое количество ошибок – 0 баллов.
	Свойства интеграла Пуассона. Гармоничность функции, представимой интегралом Пуассона. Гармоническая мера множества на единичной окружности, ее свойства.	Правильное выполнение задания – 6 баллов. Наличие отдельных ошибок – 3 – 5 баллов. Большое количество ошибок, решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов.
	Определение гармонических функций. Примеры. Арифметические операции над гармоническими функциями, сохранение гармоничности при композициях с конформными и аффинными отображениями. Различные формы записи уравнения Лапласа	Глубокие знания – 4 балла. Неуверенные знания – 2 – 3 балла. Серьезные пробелы в знаниях, ошибки – 0 баллов

**2. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенций.**



<b>Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина</b>	<b>Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков (2-3 примера)</b>	<b>Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания</b>
ПК-1 Способен использовать базовые знания в области математических и естественных наук, программирования и информационных технологий	Нахождение в аналитической форме решения задачи Коши для уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными	Уверенное владение, задание полностью выполнено – 5 баллов. Наличие отдельных ошибок – 3 балла. Большое количество ошибок – 0 баллов.
	Построение в виде тригонометрических рядов решения краевых задач для уравнения Лапласа, начально-краевых задач для уравнений теплопроводности и волнового в случае двух независимых переменных.	Правильное выполнение задания – 5 баллов. Наличие отдельных ошибок – 3 – 4 балла. Большое количество ошибок, решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов.
	Способы аппроксимации частных производных разностными отношениями, построение разностных схем для основных уравнений в частных производных	Глубокие знания – 4 балла. Неуверенные знания – 2 – 3 балла. Серьезные пробелы в знаниях, ошибки – 0 баллов

## V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]/ Кудряшов Н.А.— Электрон. текстовые данные.— Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2004.— 360 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/16489.html>.— ЭБС «IPRbooks».
2. Сухинов А.И. Курс лекций по уравнениям математической физики с примерами и задачами [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Сухинов А.И., Зуев В.Н., Семенистый В.В.— Электрон. текстовые данные.— Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009.— 308 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/46989.html>.— ЭБС «IPRbooks».

б) дополнительная литература:

3. Щербакова Ю.В. Уравнения математической физики [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Щербакова Ю.В., Миханьков М.А.— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— 159 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/6352.html>.— ЭБС «IPRbooks».
4. Алексеев А.Д. Уравнения с частными производными в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Алексеев А.Д., Кудряшов С.Н., Радченко Т.Н.— Электрон. текстовые данные.— Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009.— 80 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/47167.html>.— ЭБС «IPRbooks».
5. Пичугин Б.Ю. Уравнения математической физики [Электронный ресурс]: курс лекций/ Пичугин Б.Ю., Пичугина А.Н.— Электрон. текстовые данные.— Омск: Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, 2016.— 180 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/59669.html>.— ЭБС «IPRbooks».

## **VI. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

<http://www.libraru.tversu.ru> – научная библиотека ТвГУ,  
<http://www.biblioclub.ru/> - университетская библиотека ONLINE:  
<http://lib.mexmat.ru/> – научная библиотека МГУ.

## **VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом должна соответствовать более глубокому усвоению изучаемого курса, формировать навыки исследовательской работы и ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике.

1. Работа с учебными пособиями. Для полноценного усвоения курса студент должен,

прежде всего, овладеть основными понятиями этой дисциплины. Необходимо усвоить определения и понятия, уметь приводить их точные формулировки, приводить примеры объектов, удовлетворяющих этому определению. Кроме того, необходимо знать круг фактов, связанных с данным понятием. Требуется также знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями.

2. Самостоятельное изучение тем. Самостоятельная работа студента является важным видом деятельности, позволяющим хорошо усвоить изучаемый предмет и одним из условий достижения необходимого качества подготовки и профессиональной переподготовки специалистов. Она предполагает самостоятельное изучение студентом рекомендованной учебно-методической литературы, различных справочных материалов, написание рефератов, выступление с докладом, подготовку к лекционным и практическим занятиям, подготовку к зачёту и экзамену.

3. Подготовка к практическим занятиям. При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется следовать методическим рекомендациям по работе с учебными пособиями, приведенным выше.

4. Подготовка к зачету / экзамену. При подготовке к зачету / экзамену студенты должны использовать как самостоятельно подготовленные конспекты, так и материалы, полученные в ходе лекций. Для получения зачета по дисциплине необходимо решить минимум 51% тестовых заданий (минимальная оценка – удовлетворительно), при решении меньшего количества заданий зачет считается не сданным. Экзамен студенты могут сдавать в виде теста, контрольной работы или устного ответа по вопросам, представленным в данной программе. Для получения положительной оценки на экзамене необходимо продемонстрировать знания, не ниже базового (минимального) уровня.

Сроки проведения рейтингового контроля:

*осенний семестр* – I рейтинговый контроль успеваемости проводится на 9-10 учебной неделе по графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса;

*весенний семестр* – I рейтинговый контроль успеваемости проводится на 32-33 учебной неделе по графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса.

Максимальное количество баллов, которое может быть получено в результате освоения дисциплины составляет 100 баллов, из них 60 баллов отводится на текущий контроль (например, по 30 баллов на каждый модуль) и 40 баллов на зачет/экзамен.

## **VIII. Перечень педагогических и информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

При изучении дисциплины применяются общепринятые формы обучения: лекции, семинарские и практические занятия, на которых широко используются элементы интерактивного обучения (активное, постоянное взаимодействие между преподавателем и студентом в процессе обучения), самостоятельная работа студента (выполнение индивидуальных домашних заданий), консультации. Лекционный курс сопровождается презентациями.

**IX. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Учебные аудитории, оснащенные средствами мультимедиа.

**X. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины**

№ п. п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения
1			
2			