

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 19.09.2022 11:28:05  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:

Руководитель ООП

\_\_\_\_\_ Цветков В.П.

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

**«АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ»**

Направление подготовки / Специальность

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)

Математическое и компьютерное моделирование

Для студентов 1 курса, очная

*(указывается курс, форма обучения)*

Составитель:

*к.ф.м.н., доцент Рыжиков В.Н.*

Тверь, 2021

## I. Аннотация

### 1. Цель и задачи дисциплины

Целями освоения дисциплины «Алгебра и теория чисел» являются привитие научного подхода к исследованиям явлений природы, социально-экономических процессов; построение модели в виде задачи алгебры и теории чисел при решении теоретических и практических задач.

Задачами освоения дисциплины являются: развитие абстрактного логического мышления; ознакомление студентов с фундаментальными понятиями алгебры и теории чисел, теорией делимости в кольцах, линейным пространством, линейными операторами, формирование логического мышления, развитие абстрактного мышления.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП

2.1. Дисциплина **Б1.О.09. «Алгебра и теория чисел»** относится к базовой части Блока 1.

2.2. Для изучения данной дисциплины необходимы следующие

предшествующие дисциплины:

– Математика (алгебра, геометрия, алгебра и начала анализа) в объеме школьной программы.

2.3. Перечень последующих дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной дисциплиной:

- математический анализ;
- дифференциальные уравнения;
- дискретная математика;
- математическая логика;
- производственная практика: научно-исследовательская р

**3. Объем дисциплины:** 12 зачетных единиц, 432 академических часов, **в том числе:**

**контактная аудиторная работа:** лекции 108 часов, практические занятия 91 часов;

**контактная внеаудиторная работа: самостоятельная работа:** 233 часа, в том числе контроль 27 часов.

### 4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
---	---

УК1.1.	Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие
УК1.2.	Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи
УК1.3.	Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов
ОПК 1.1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области алгебры, теории чисел в профессиональной деятельности
ОПК 1.2	Применяет методы решения задач математического моделирования естественных и социально-экономических систем на основе теоретических знаний в профессиональной деятельности
ОПК 1.3.	Проводит консультации по решению конкретных задач математического моделирования

**5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения:** 1-й семестр – экзамен, 2-й семестр – экзамен.

**6. Язык преподавания:** русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа		Самостоятель- ная работа, в том числе контроль (час.)
		Лекции	Практичес- кие занятия	
Множества и операции над ними. Отношения в множествах. Бинарные отношения. Отображения, композиция отображений, обратимые отображения. Отношение эквивалентности и отношение порядка. Фактор множество, разбиения множества. Системы действительных, рациональных, целых и натуральных чисел	13	2	4	7
Алгебраические операции. Полугруппа, группа, кольцо, поле. Простейшие свойства полугрупп, групп, колец, полей. Группа преобразований множества. Подгруппа. Подкольцо. Подполе. Изоморфизм алгебраических структур.	31	6	9	16

<p>Определение поля комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Геометрическая интерпретация поля комплексных чисел. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме. Извлечение корней из комплексных чисел. Комплексно сопряжённые числа. Корни из единицы. Показательная форма комплексного числа</p>	20	6	4	10
<p>Определитель второго и третьего порядков. Перестановки и подстановки. Определение определителя. Свойства определителя. Линейно зависимая система строк. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера. Операции над матрицами и их свойства. Обратная матрица. Условие обратимости матрицы. Определитель произведения матриц. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Теорема о ранге матрицы. Теорема о базисном миноре.</p>	37	8	9	20

<p>Матричная форма записи системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Система линейных однородных уравнений. Свойства решений однородной системы уравнений. Теорема о фундаментальной системе решений. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем.</p>	29	8	9	12
<p>Определение, примеры, простейшие свойства векторных пространств. Линейная зависимость векторов. Базис и ранг системы векторов. Конечномерные векторные пространства. Базис и размерность конечномерного векторного пространства. Координаты вектора относительно данного базиса. Подпространство. Пересечение, сумма и прямая сумма подпространств. Связь между координатами векторов относительно различных базисов. Изоморфизм векторных пространств.</p>	29	8	8	13

<p>Понятия линейного оператора. Операции над линейными отображениями. Обратимые операторы. Связь между координатами вектора и его образа. Матрица линейного оператора, связь между матрицами линейного оператора в разных базисах. Собственные числа и собственные векторы оператора, связь с матричными понятиями.</p>	27	10	5	12
---	----	----	---	----

<p>Скалярное произведение, евклидовы и унитарные пространства. Длина вектора и угол между векторами. Ортогональность. Процесс ортогонализации. Ортонормированный базис, его существование. Скалярное произведение векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе. Ортогональные матрицы и ортогональные линейные операторы, их свойства. Симметрические линейные операторы, их свойства. Квадратичная форма. Канонический вид квадратичной формы, возможность приведения к ней. Практический поиск канонического вида квадратичной формы. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду</p>	40	15	10	15
---	----	----	----	----



<p>Идеалы кольца. Идеалы кольца  целых чисел. Отношение  делимости. Теорема о делении с  остатком для целых чисел.  Взаимно простые числа.  Простые числа и основная  теорема арифметики.  Бесконечность множества  простых чисел. Каноническое  разложение. НОД и НОК.  Алгоритм Евклида. Конечные  цепные дроби. Целые  систематические числа</p>	46	13	10	23
<p>Числовые сравнения и их  свойства. Классы вычетов.  Полная и приведенная системы  вычетов. Функция Эйлера.  Теорема Эйлера. Сравнения  первой степени. Признаки  делимости. Сравнения высших  степеней по простому модулю  Обращение обыкновенной  дроби в систематическую.</p>	38	12	9	17

<p>Кольцо многочленов от одной переменной над коммутативным кольцом. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов. Теорема о делении с остатком для многочленов над полем. Делители, НОД и НОК. Алгоритм Евклида. Приводимые и неприводимые многочлены. Корни многочлена. Кратные корни. Теорема Безу. Схема Горнера. Основная теорема. Каноническое разложение многочлена над полем. Интерполяционная формула Лагранжа. Формулы Виета</p>	42	12	9	21
---	----	----	---	----

Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Разложение многочлена над полем комплексных чисел в произведение неприводимых множителей. Сопряженность мнимых корней многочлена с действительными коэффициентами. Разложение многочлена над полем действительных чисел в произведение неприводимых множителей. Рациональные дроби разложение их на сумму простейших дробей. Корни многочлена с целыми коэффициентами.	26	8	5	13
Всего часов	378	108	91	179

### **III. Образовательные технологии**

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании аудиторных занятий и различных форм самостоятельной работы студентов.

Также на занятиях практикуется самостоятельная работа студентов, выполнение заданий в малых группах, письменные работы, моделирование дискуссионных ситуаций, работа с раздаточным материалом, привлекаются ресурсы сети INTERNET. Курс предусматривает выполнение контрольных и самостоятельных работ, письменных домашних заданий. В качестве форм контроля используются различные варианты взаимопроверки и взаимоконтроля.

Интерактивное взаимодействие студентов с одной стороны и преподавателя с другой, а также студентов между собой и с преподавателем во время практических занятий.

#### ***Образовательные технологии***

1. Дискуссионные технологии
2. Информационные (цифровые)
3. Технологии развития критического мышления

#### ***Современные методы обучения***

1. Активное слушание
2. Лекция (традиционная)

#### IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

##### 1. Оценочные материалы для проведения текущей аттестации

Комплексные числа.

1) Вычислите:

а)  $(2 + 5i)^3$ ;      б)  $\frac{23 + i + i^{37}}{3 - i + i^{122}}$ .

2) Решите уравнение:  $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$ .

3) Вычислите, используя тригонометрическую форму записи комплексного числа:

а)  $\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{13}$ ;      б)  $\sqrt[4]{4}$ .

4) Решите уравнение: а)  $\bar{z} = -zi$ ; б)  $2|z| - 8z + 1 + 2i = 0$ .

5) Пусть  $w = \frac{z-1}{z+1}$ , где  $z \neq \pm 1$ . Докажите, что  $w$  – чисто мнимое тогда и только тогда, когда  $|z| = 1$ .

6) Изобразите на плоскости множество всех точек, для которых  $\begin{cases} 1 \leq |2i - z| < 3; \\ \arg z = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Алгебраические многочлены

1) Разложите многочлен  $8x^4 + 8x^3 - 27x - 27$  на множители.

2) Найдите наибольший общий делитель двух многочленов и его линейное представление:  $x^5 + 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 6x - 2$  и  $x^5 + 2x^4 - 3x^2 - 4x - 2$ .

3) Отделите кратные множители:

$$x^7 + 6x^6 - 5x^5 - 80x^4 - 185x^3 - 194x^2 - 99x - 20.$$

4) Решите уравнение 3 степени:  $x^3 + 3x^2 - 3x + 4 = 0$ .

5) Решите уравнение 4 степени:  $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$ .

6) Для многочлена  $3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8$  определите кратность корня  $s = -1$ .

7) Разложите многочлен  $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 22$  по степеням  $x - 2$ .

8) Найдите многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами, имеющий тройной корень  $i$ , простые корни 2 и 3.

9) Найдите коэффициент  $a$  так, чтобы многочлен  $x^5 - ax^2 - ax + 1$  имел  $-1$  корнем не ниже второй кратности.

10) Запишите в лексикографическом виде:  $2x^2y - 3x^2y^2 + y^5 + 4x^3y^2 + 7xy - 2x + 3$ .

11) Выразите через элементарные симметрические многочлены:  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$ .

12) Представьте в виде суммы простейших дробей над полем действительных чисел:

$$\frac{2x^4 + 3}{x^3(x^2 - 1)}.$$

Алгебра матриц. Теория определителей.

1) Входит ли в определитель соответствующего порядка произведение и, если входит, то с каким знаком: а)  $a_{34}a_{25}a_{51}a_{66}a_{13}a_{42}$ ; б)  $a_{51}a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}$ ?

2) Выполните умножение подстановок:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислите определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$$

4) Вычислите определитель, пользуясь теоремой Лапласа:

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 & 9 & 5 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{vmatrix}.$$

5) Вычислите определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

6) Вычислите определитель, применяя метод рекуррентных соотношений:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}, \text{ (порядка } 2n\text{)}.$$

7) Пусть  $X$  – матрица второго порядка. Решите уравнение:  $X^2 = X$ .

8) Вычислите:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

9) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Системы линейных уравнений. Метод Гаусса Решите системы уравнений методом Гаусса:  
 1. Решить систему линейных уравнений: 1) методом Гаусса; 2) по формулам Крамера; 3) матричным методом.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 7, \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

2. Исследовать совместность данной системы и, в случае ее совместности, найти общее решение и одно частное решение.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

3. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

## 2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

Планируемый образовательный результат (компетенция, индикатор)	Типовые контрольные задания	Критерии оценивания и шкала оценивания
УК1.1.	1. Сформулируйте и докажите теорему Кронекера-Капелли,	• Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы,

<p>Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие.</p> <p>УК1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи.</p> <p>УК1.3. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов.</p> <p>ОПК 1.1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области алгебры, теории чисел в профессиональной деятельности.</p> <p>ОПК 1.2 Применяет методы решения задач математического моделирования естественных и социально-экономических систем на основе теоретических знаний в профессиональной деятельности.</p> <p>ОПК 1.3. Проводит консультации по решению конкретных задач математического моделирования</p>	<p>теорему Крамера.</p> <p>2.Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Би 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. При первом способе раскроя получается 3 заготовки типа А, 1 заготовка типа Би 4 заготовки типа В, при втором способе раскроя получается 2 заготовки типа А, 6 заготовок типа Би 1 заготовка типа В, при третьем способе раскроя получается 1 заготовка типа А, 2 заготовки типа Би 5 заготовок типа В. Записать в математической форме условия выполнения задачи.</p> <p>3. Решите полученную(п.2.) систему уравнений различными методами Крамера, Гаусса, матричным.</p> <p>4.Сравните различные методы решения системы из пункта 3.</p>	<p><i>приведены необходимые примеры; студент показывает понимание излагаемого материала – 85 – 100 баллов</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы, приведены примеры, однако имеются неточности; в целом студент показывает понимание изученного материала – 70 – 84 балла</i></li> <li>• <i>Ответ дан в основном правильно, но недостаточно аргументированы выводы, приведены не все необходимые примеры – 40 - 69 баллов</i></li> <li>• <i>Даны неверные ответы на поставленные вопросы – 0 - 39 баллов</i></li> </ul>
--	--	--

## V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 1) Рекомендуемая литература

#### **а) Основная литература**

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учебник / А.Г. Курош. -Москва: Лань, 2013. -431 с. – Электронный ресурс. –Режим доступа:  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=30198](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=30198).
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру: Основные структуры алгебры.-Москва: МЦНМО, 2009. -272 с.–Электронный ресурс. –Режим доступа:  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>
3. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре: учебное пособие. -Санкт-Петербург: Лань, 2008.–Электронный ресурс. –Режим доступа:  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=399](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=399)
4. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: учебное пособие. -Санкт-Петербург: Лань, 2007.– Электронный ресурс. –Режим доступа:  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=397](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=397)

#### **б) Дополнительная литература**

1. Глухов М.М. Алгебра. -Москва: Лань", 2015.–Электронный ресурс. –Режим доступа:  
[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=67458](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67458)

#### **2) Программное обеспечение**

- а) Лицензионное программное обеспечение MS Office 365 pro plus (Акт приема-передачи No 369 от 21 июля 2017); MS Windows 10 Enterprise (Акт приема-передачи No 369 от 21 июля 2017); MATLAB R2012b Пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений (Акт предоставления прав ИС 00000027 от 16.09.2011); –9–Mathcad 15 M010 Система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением (Акт предоставления прав No Us000311 от 25.09.2012).
- б) Свободно распространяемое программное обеспечение Google Chrome; MiKTeX 2.9 Открытый дистрибутив TeX для платформы Windows.

#### **3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

1. [www.math.ru](http://www.math.ru) –сайт посвящён Математике и математикам. Этот сайт для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой.
2. <http://www.edu.ru/> –Федеральный портал «Российское образование»

#### **4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. [www.exponenta.ru](http://www.exponenta.ru) –образовательный математический сайт.
2. [www.matematicus.ru](http://www.matematicus.ru) –учебный материал по различным математическим курсам.

#### **VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины**

##### **Учебная программа курса**

- |   |
|---|
| <p><b>1.</b> Множества и операции над ними. Отношения в множествах. Бинарные отношения. Отображения, композиция отображений, обратимые отображения. Отношение эквивалентности и отношение порядка. Фактор множество, разбиения множества. Системы действительных, рациональных, целых и натуральных чисел</p> |
| <p><b>2.</b> Алгебраические операции. Полугруппа, группа, кольцо, поле. Простейшие свойства полугрупп, групп, колец, полей. Группа преобразований множества. Подгруппа. Подкольцо. Подполе. Изоморфизм алгебраических структур.</p>   |



**3.**Определение поля комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Геометрическая интерпретация поля комплексных чисел. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме. Извлечение корней из комплексных чисел. Комплексно сопряжённые числа. Корни из единицы. Показательная форма комплексного числа

**4.**Определитель второго и третьего порядков. Перестановки и подстановки. Определение определителя. Свойства определителя. Линейно зависящая система строк. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера. Операции над матрицами и их свойства. Обратная матрица. Условие обратимости матрицы. Определитель произведения матриц. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Теорема о ранге матрицы. Теорема о базисном миноре.

**5.**Матричная форма записи системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Система линейных однородных уравнений. Свойства решений однородной системы уравнений. Теорема о фундаментальной системе решений. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем.

**6.**Определение, примеры, простейшие свойства векторных пространств. Линейная зависимость векторов. Базис и ранг системы векторов. Конечномерные векторные пространства. Базис и размерность конечномерного векторного пространства. Координаты вектора относительно данного базиса. Подпространство. Пересечение, сумма и прямая сумма подпространств. Связь между координатами векторов относительно различных базисов. Изоморфизм векторных пространств.

**7.**Понятия линейного оператора. Операции над линейными отображениями. Обратимые операторы. Связь между координатами вектора и его образа. Матрица линейного оператора, связь между матрицами линейного оператора в разных базисах. Собственные числа и собственные векторы оператора, связь с матричными понятиями.

**8.**Скалярное произведение, евклидовы и унитарные пространства. Длина вектора и угол между векторами. Ортогональность. Процесс ортогонализации. Ортонормированный базис, его существование. Скалярное произведение векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе. Ортогональные матрицы и ортогональные линейные операторы, их свойства. Симметрические линейные операторы. Их свойства. Квадратичная форма. Канонический вид квадратичной формы, возможность приведения к ней. Практический поиск канонического вида квадратичной формы. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду

**9.**Идеалы кольца. Идеалы кольца целых чисел. Отношение делимости. Теорема о делении с остатком для целых чисел. Взаимно простые числа. Простые числа и основная теорема арифметики. Бесконечность множества простых чисел. Каноническое разложение. НОД и НОК. Алгоритм Евклида. Конечные цепные дроби. Целые систематические числа

**10.**Числовые сравнения и их свойства. Классы вычетов. Полная и приведенная системы вычетов. Функция Эйлера. Теорема Эйлера. Сравнения первой степени. Признаки делимости. Сравнения высших степеней по простому модулю Обращение обыкновенной дроби в систематическую.

**11.**Кольцо многочленов от одной переменной над коммутативным кольцом. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов. Теорема о делении с остатком для многочленов над полем. Делители, НОД и НОК. Алгоритм Евклида. Приводимые и неприводимые многочлены. Корни многочлена. Кратные корни. Теорема Безу. Схема Горнера. Основная теорема. Каноническое разложение многочлена над полем. Интерполяционная формула Лагранжа. Формулы Виета

**12.**Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Разложение многочлена над полем комплексных чисел в произведение неприводимых множителей. Сопряженность мнимых корней многочлена с действительными коэффициентами. Разложение многочлена над полем действительных чисел в произведение неприводимых множителей. Рациональные дроби разложение их на сумму простейших дробей. Корни многочлена с целыми коэффициентами.

### Типовые вопросы и задачи для проверки самостоятельной работы

Системы линейных уравнений. Метод Гаусса

1. Что называется решением системы уравнений?
2. Решите систему уравнений методом Гаусса
3. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислите:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k; \text{ б) } \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

5. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Теория определителей. Правило Крамера решения систем линейных уравнений

1. Как вычислить определитель второго порядка?
2. Как вычислить определитель третьего порядка?
3. Как вычислить определитель четвёртого порядка?
4. Подберите  $k$  и  $l$  так, чтобы перестановка  $(1, 2, 7, 4, k, 5, 6, l, 9)$  была четной.
5. Выполните умножение подстановок:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}^3.$$

6. Вычислите определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & 19 & -4 \\ 5 & 8 & -1 & 1 & -6 \end{vmatrix} \quad \text{б) } \begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель, пользуясь теоремой Лапласа:

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Системы линейных уравнений.

1. Что называется решением системы уравнений?
2. Какую матрицу называют расширенной матрицей системы?

3. Найдите общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

4. Методом Гаусса решите систему и найдите все её базисные решения

Арифметические векторные пространства

1. Что называется линейным пространством?

2. Дайте определение базиса линейного пространства.

3. Покажите, что векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{d}$  в этом базисе.

$$\vec{a} = (-3, 4, 7), \vec{b} = (0, -8, 11), \vec{c} = (13, 1, 5), \vec{d} = (-19, -1, 20).$$

2. Даны два базиса пространства строк:  $e_1, e_2, e_3$  и  $f_1, f_2, f_3$ . Найдите:

а) матрицу  $A$  перехода от базиса  $e_1, e_2, e_3$  к базису  $f_1, f_2, f_3$ ;

б) матрицу  $A^{-1}$  обратного перехода;

в) координаты  $e_1$  в обоих базисах;

г) координаты вектора  $a$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$ , имеющего во втором базисе координаты  $(1, 1, 1)$ .

$$e_1 = (0, 1, 1), e_2 = (1, 0, 1), e_3 = (1, 0, 2); \quad f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (2, 1, 0), f_3 = (1, -1, 3)$$

Линейное отображение.

1. Дайте определение линейного отображения.

2. Как строится матрица линейного отображения в заданном базисе

3. Найдите базисы ядра и образа линейного оператора

а)  $\varphi(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$ ;

б)  $\varphi(x) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$ ;

в)  $\varphi(x) = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$ .

4. Сформулируйте условие диагонализруемости матрицы линейного оператора.

### Вопросы к экзамену по дисциплине

1. Метод Гаусса: доказательство теоремы о возможности приведения системы к трапецидальному виду. Общее и частное решение.

2. Свойства перестановок. Свойства подстановок.

3. Понятие определителя, его свойства.

4. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя.

5. Теорема Крамера.

6. Определитель Вандермонда.

7. Понятие арифметического пространства, определения линейно зависимой и независимой системы векторов. Критерий линейной зависимости.

8. Теорема о линейной зависимости линейных комбинаций и следствия из нее.

9. Базис и ранг системы векторов.

10. Эквивалентные системы векторов: их свойства, доказательство равенства рангов эквивалентных систем.
11. Теорема о ранге матрицы.
12. Равенство рангов системы строк и столбцов матрицы. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях матрицы. Перечисление базисов системы векторов.
13. Критерий того, что определитель квадратной матрицы равен 0.
14. Система линейных однородных уравнений. Ранг и базис множества решений.
15. Системы неоднородных линейных уравнений: теорема Кронекера-Капелли; связь с соответствующей системой линейных однородных уравнений.
16. Понятие алгебраической операции. Примеры и контр-примеры. Понятие полугруппы. Единственность единицы. Единственность обратного элемента в полугруппах.
17. Группы. Группа подстановок. Примеры подгрупп.
18. Понятие кольца. Понятие поля. Делители нуля в кольце и их отсутствие в поле. Примеры.
19. Построение поля комплексных чисел.
20. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия с комплексными числами в этой форме. Формула Муавра. Свойства модуля комплексного числа.
21. Извлечение корня  $n$ -ой степени из комплексного числа в тригонометрической форме. Расположение корней на плоскости.
22. Группа корней из единицы. Понятие первообразного корня. Примеры.
22. Действия с матрицами. Кольцо квадратных матриц над кольцом.
23. Элементарные матрицы. Связь элементарных преобразований с элементарными матрицами.
24. Ранг произведения матриц.
25. Определитель произведения матриц.
26. Критерий обратимости квадратной матрицы над полем. Построение обратной матрицы способом, связанным с алгебраическими дополнениями.
27. Критерий обратимости квадратной матрицы над полем. Способ построения обратной матрицы, связанный с приписыванием единичной матрицы.
28. Построение кольца многочленов от одной буквы над кольцом.
29. Теорема о делении с остатком для кольца многочленов над полем.
30. Многочлен как функция. Схема Горнера. Теорема Безу. Теорема о числе корней. Достаточные условия совпадения двух определений многочлена.
31. Наибольший общий делитель двух многочленов. Алгоритм Евклида. Разложение НОД. Критерий взаимной простоты. Свойства взаимно простых многочленов.
32. Понятие приводимого многочлена над полем. Взаимная простота неприводимых неассоциированных многочленов. Теорема о разложении многочлена над полем в произведение многочленов, неприводимых над этим полем.
33. Кратность неприводимого множителя в каноническом разложении многочлена; ее связь с кратностью этого множителя в производной. Отделение кратных множителей.
34. Формулировка основной теоремы алгебры комплексных чисел. Вид неприводимых многочленов над полями комплексных и действительных чисел.
35. Делимость целых чисел. Деление с остатком. Алгоритм Евклида. Разложение НОД. Критерий взаимной простоты.
36. Простые числа. Теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел. Существование и единственность разложения на простые множители.
37. Классы вычетов по данному модулю. Решение сравнений первой степени. Сравнения и их основные свойства.
38. Кольцо вычетов. Поле вычетов по простому модулю. Приведенная система вычетов. Теоремы Эйлера, Ферма и Вильсона.

39. Сравнения с одним неизвестным. Применение сравнений к решению диофантовых уравнений первой степени. Системы сравнений, китайская теорема об остатках. Сравнения по простому и составному модулю.
40. Решение сравнений второй степени. Квадратичные вычеты. Закон взаимности квадратичных вычетов.
41. Функция Эйлера, её вычисление и применение.
42. Функция Мёбиуса. Формула обращения Мёбиуса. 9. Первообразные корни и индексы. Дискретный логарифм.
43. Линейные пространства.
44. Линейная зависимость и независимость системы векторов пространства над произвольным полем, свойства.
45. Критерий подпространства, линейная оболочка. Максимальная линейно независимая подсистема (база) системы векторов, ранг.
46. Базис векторного пространства (подпространства), размерность.
47. Матрица перехода от одного базиса пространства к другому. Координаты вектора в данном базисе, их изменение при переходе к другому базису.
48. Изоморфизм векторных пространств.
49. Пересечение и сумма подпространств. Прямая сумма подпространств.
50. Линейные функции на векторном пространстве. Коэффициенты линейной формы. Сопряженное пространство, дуальный базис, естественный изоморфизм.
51. Евклидово пространство, свойства скалярного произведения.
52. Матрица Грамма.
53. Неравенство Коши-Буняковского. Метрические соотношения в евклидовом пространстве.
54. Ортогональная система векторов, процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Существование ортонормированного базиса.
55. Ортогональное дополнение к подпространству и ортогональная проекция вектора на подпространство евклидова пространства.
56. Евклидов изоморфизм.
57. Ортонормированные базисы евклидовых пространств, ортогональность матрицы перехода от одного такого базиса к другому.
58. Унитарные пространства, полуторалинейные комплексные формы. Метрические соотношения и вопросы, связанные с ортогональностью, в унитарном пространстве.
59. Линейные отображения векторных пространств. Линейные отображения (операторы) векторных пространств над одним и тем же полем.
60. Образ и ядро линейного отображения, ранг и дефект, их связь с размерностью области определения отображения.

61. Матрицы линейных отображений (операторов), их изменение при переходе к другим базисам. Пространство линейных отображений, алгебра линейных операторов, полная линейная группа невырожденных линейных операторов.
62. Изоморфизм пространств линейных отображений и прямоугольных матриц.
63. Изоморфизм алгебр (полных линейных групп невырожденных) линейных операторов и квадратных (невырожденных) матриц.
64. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов.
65. Диагонализируемые операторы. Характеристический многочлен оператора.
66. Теорема Гамильтона-Кэли. Минимальный многочлен оператора.
67. Жорданова нормальная форма (ЖНФ) матрицы оператора. Алгоритм нахождения базиса, в котором матрица линейного оператора имеет ЖНФ.
68. Критерий диагонализуемости линейного оператора, действующего в пространстве над полем  $C$ .
69. Линейные операторы евклидовых и унитарных пространств.
70. Сопряженное отображение (оператор) унитарных (евклидовых) пространств, его существование и единственность для данного линейного отображения (оператора). Матрица сопряженного оператора в ортонормированном базисе, свойства.
71. Теорема Шура для линейного оператора унитарного пространства.
72. Нормальный оператор унитарного пространства, существование для него базиса из собственных векторов. Унитарный оператор унитарного пространства, критерий унитарности оператора в терминах его собственных значений; другие критерии. Эрмитов (самосопряженный) оператор унитарного пространства, критерии эрмитовости оператора.
73. Положительно (неотрицательно) определенные эрмитовы операторы, свойства. Арифметический корень из неотрицательно определенного эрмитова оператора.
74. Квадратичная форма, ее матрица.
75. Изменение матрицы при линейном преобразовании переменных.
76. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Нормальный вид квадратичной формы, эквивалентность квадратичных форм.
77. Закон инерции действительных квадратичных форм. Распадающиеся квадратичные формы.
78. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы, критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования переменных.

#### **Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Организуя свою учебную работу, студенты должны:

*Во-первых*, выявить рекомендуемый режим и характер учебной работы по изучению теоретического курса, практическому применению изученного материала, по

выполнению заданий для самостоятельной работы, по использованию информационных технологий и т.д.

*Во-вторых*, ознакомиться с указанным в методическом материале по дисциплине перечнем учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам для подготовки к занятиям и выполнения самостоятельной работы, а также с методическими материалами на бумажных и/или электронных носителях, выпущенных кафедрой своими силами и предоставляемые студентам во время занятий.

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом должна соответствовать более глубокому усвоению изучаемого курса, формировать навыки исследовательской работы и ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике.

**1. Работа с учебными пособиями.** Для полноценного усвоения курса студент должен, прежде всего, овладеть основными понятиями этой дисциплины. Необходимо усвоить определения и понятия, уметь приводить их точные формулировки, приводить примеры объектов, удовлетворяющих этому определению. Кроме того, необходимо знать круг фактов, связанных с данным понятием. Требуется также знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями.

**2. Самостоятельное изучение тем.** Самостоятельная работа студента является важным видом деятельности, позволяющим хорошо усвоить изучаемый предмет и одним из условий достижения необходимого качества подготовки и профессиональной переподготовки специалистов. Она предполагает самостоятельное изучение студентом рекомендованной учебно-методической литературы, различных справочных материалов, написание рефератов, выступление с докладом, подготовку к лекционным и практическим занятиям, подготовку к зачёту.

**3. Составление глоссария.** В глоссарий должны быть включены основные понятия, которые студенты изучают в ходе самостоятельной работы. Для полноты исследования рекомендуется вписывать в глоссарий и те термины, которые студентам будут раскрыты в ходе лекционных занятий.

**4. Составление конспектов.** В конспекте отражены основные понятия темы. Для наглядности и удобства запоминания использованы схемы и таблицы.

**5. Подготовка к экзамену.** При подготовке к экзамену студенты должны использовать как самостоятельно подготовленные конспекты, так и материалы, полученные в ходе занятий.

Качество усвоения студентом каждой дисциплины оценивается по 100-балльной шкале.

Интегральная рейтинговая оценка (балл) по каждому (периоду обучения) складывается из оценки текущей работы студентов на семинарских и практических занятиях, выполнения индивидуальных творческих заданий и др. и оценки за выполнение студентом учебного задания при рейтинговом контроле успеваемости. При этом доля баллов, выделенных на рейтинговый контроль не должна превышать 50% общей суммы баллов данного модуля (периода обучения).

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся зачетом, по итогам семестра составляет 100 баллов (50 баллов – 1-й модуль и 50 баллов – 2-й модуль).

Студенту, набравший 40 баллов и выше по итогам работы в семестре, в экзаменационной ведомости и зачетной книжке выставляется оценка «зачтено». Студенту, набравшему до 39 баллов включительно, сдает зачет,



Сумма рейтинговых баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60(30 баллов –1-й модуль и 30 баллов –2-й модуль). Студенту, набравшему 40–54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в экзаменационной ведомости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно». Студенту, набравшему 55–60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе экзаменационной ведомости «Премияльные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо». В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается. Оценку «отлично» студент может получить только на экзамене. Студент, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен. При наличии подтверждённых документально уважительных причин, по которым были пропущены занятия (длительная болезнь, обучение в другом вузе в рамках студенческой мобильности и др.), студент имеет право отработать пропущенные занятия и получить дополнительные баллы в рамках установленных баллов за модуль.

Согласно подходам балльно-рейтинговой системы в рамках оценки знаний, умений, владений (умений применять) и (или) опыта деятельности дисциплины установлены следующие аспекты:

- Содержание учебной дисциплины в рамках одного семестра делится на два модуля (периода обучения). По окончании модуля (периода обучения) осуществляется рейтинговый контроль успеваемости знаний студентов.

- Сроки проведения рейтингового контроля:

*осенний семестр* – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса;

*весенний семестр* – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости – две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса.

## **VII. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебная аудитория, оснащенная комплектом мультимедийной техники. Меловая доска, комплект учебной мебели.

<p>Учебная аудитория: 314 (170002 Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)</p>	<p><i>Мультимедийный комплект учебного класса (вариант № 2). Проектор Casio XJ-M140, настенный проекц. экран Lumien 180*180, ноутбук Dell N4050, сумка 15,6", мышь 0001384111. Усилитель Roxton AA-120. Радиосистема Shure PG288/PG58. Микшер Mackie 402 VLZ. Стационарный микрофон SOUNDKING EG002 с настольным держателем.</i></p>	<p>Microsoft Office профессиональный плюс 2013 – Акт приема передачи № 689 от 05.07.2019 г. MS Office 365 pro plus Акт приема передачи №689 от 05.07.2019 г.;</p>
---	--	---

<p>Учебная аудитория: 19 (170002 Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)</p>	<p><i>Мультимедийный проектор Casio XJ-H2650 с потолочным креплением и моториз. экраном.</i></p> <p><i>Шкаф напольный 19".</i></p> <p><i>Меловая доска, комплект учебной мебели.</i></p> <p>Проектор Epson EB-W41 с креплением KROMAX Projector-10.</p> <p>Настенный экран Lumien Eco Picture 180x180 см Matte White.</p> <p><i>Меловая доска, комплект учебной мебели.</i></p>	<p>Microsoft Windows 10 Enterprise Акт приема передачи №689 от 05.07.2019 г.;</p> <p>Google Chrome – бесплатное ПО;</p> <p>Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав №969 18.10.2018 г.</p> <p>Microsoft Office профессиональный плюс 2013 – Акт приема передачи № 689 от 05.07.2019 г.;</p> <p>Microsoft Windows 10 Enterprise Акт приема передачи №689 от 05.07.2019 г.;</p> <p>Google Chrome – бесплатное ПО;</p> <p>Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав №969 18.10.2018 г.</p>
--	---	--

#### **VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины**

№ п/п	Обновленный раздел рабочей	Описание внесенных изменений	Дата и № протокола заседания кафедры, утвердившего изменения
-------	----------------------------	------------------------------	--

	<b>программы дисциплины</b>		
1.			
2.			